DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 16-18

UPPGIFT 19: FÖRHÅLLANDEN I TONERS FREKVENSER

C.I.P. Citizens In Power

TheArtOf Maths

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Förhållanden i toners frekvenser

Ålder: 16-18

Längd: 2 timmar

Matematikinnehåll: Intervaller, Frekvenser, Förhållanden, logaritmer.

Konstinnehåll: Matematik I musik.

Allmänna mål: Att visa att lägga till intervaller är lika med att multiplicera frekvenser och en metod för att beskriva ett intervall eller dess förhållande i termer av en oktav, perfekt kvint och stor decima, ett konkret numeriskt värde för stämning (en procentsats).

Instruktioner: Uppgiften är baserad på en allmän introduktion om förhållandet mellan matematik och musik men då det blir lite mer utmanande i "Matematik bakom"-avsnittet. Vi försöker göra det så lätt och förståeligt som möjligt med hjälp av bilder, exempel, bilder och ett YouTube-klipp.

Resurser: Youtube, böcker, artiklar, bilder och ordlista

Tips till läraren: Börja med några allmänna frågor för att väcka elevernas intresse för om, och i så fall hur, de tror att matematik och musik är relaterade. Läs sedan inledningen snabbt innan du går till "Matematik bakom musiken".

Mål: Förstå att intervall och förhållandena mellan toner kan reduceras till kombinationer av de första tre övertonerna

Utvärdering:

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	**1.** **2.** **3.**
Skriv 2 saker som du lärt dig	**1.** **2.**
Skriv 1 sak som kan förbättras	**1.**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Musik och matematik är relaterade till varandra och det sägs faktiskt att matematik kan hjälpa oss att förklara den musikaliska upplevelsen. Sedan 1998 visade Grandin, Peterson och Shaw att musik förbättrar resursfärdigheterna, vilket är avgörande för att lära sig matematiska begrepp som proportionellt resonemang och att utveckla geometri. Rauscher et al. (1997) hävdar att musik främjar utvecklingen av sådana kognitiva färdigheter och särskilt att erkänna mönster och använda logik.

Pythagoras insåg redan på 600-talet f.v.t. att olika ljud kan göras med olika vikter och vibrationer. Detta ledde till hans upptäckt att tonhöjden för en vibrerande sträng är proportionell mot och kan styras av dess längd. Strängar som är halverade i längd är en oktav högre än originalet. Ju kortare sträng, desto högre tonhöjd. Pythagoras fick också reda på att noter i vissa frekvenser låter bäst med andra frekvenser för den noten. Till exempel låter en ton på 220Hz bäst med noter på 440Hz, 660Hz och liknande. Så du kan redan se att allt från grunderna till den mest komplicerade syntesen är matematik sammanflätad med musik.

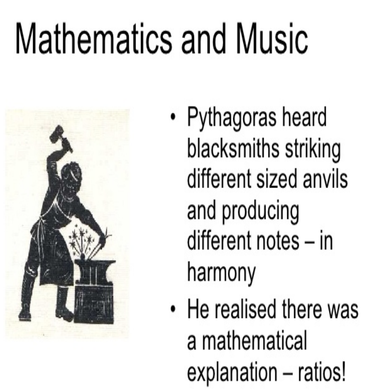


Bild 1: Diatonisk skala enligt Pythagoras(Hämtad från: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=pAHlvMTRAjeGWM)

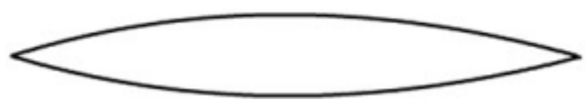
Bild 2: Pythagoras och Musik (Hämtad från: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Frekvenser, intervaller och förhållanden i musik

Några vanliga matematiska begrepp som relaterar till musik är frekvenser, intervaller och förhållanden.

Pythagoras gjorde sina upptäckter genom att ”spela” med en sträckt sträng. Nedan ser du en sträckt sträng bunden i dess ändar. När den rörs, vibrerar den. Som vi alla vet innebär en vibrerande sträng på ett instrument att en tryckvåg som rör sig genom luften når vårt öra som ett ljud.



Pythagoras beslutade att dela upp den här strängen i två delar och rörde vid varje ände igen. Ljudet som producerades var detsamma, men mer akut (eftersom det var samma ton en oktav högre):

Pythagoras fortsatte. Han experimenterade med strängen uppdelad i 3 delar:

Det var här han insåg att ett nytt, annat ljud dök upp. Den här gången var det inte samma ton en oktav högre, utan en annan ton som fick ett annat namn. Det här ljudet, förutom att det var annorlunda, fungerade bra med det föregående och skapade en trevlig harmoni i örat. Dessa uppdelningar visade matematikrelationerna **1/2** och **2/3** och tydligen gillar vår hjärna logiska relationer.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

På detta vis fortsatte han att göra underavdelningar och kombinationer av ljuden i matematiskt skapade skalor som efteråt bidrog till skapandet av musikinstrument som kunde spela dessa skalor. Numera har noterna fått de namn vi känner idag. Kulturer har skapat sina egna vågar. Till exempel skapade kineserna den pentatoniska skalan, medan västerländsk kultur antog en 12-tonsskala, även känd som en kromatisk skala.

Källor:

http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/ och

http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

Frekvens: Frekvens är antalet händelser I en upprepad serie per tidsenhet. Perioden är tiden för en cykel i en upprepande händelse, så perioden är den ömsesidiga frekvensen. Till exempel: om ett nyfött barns hjärta slår med en frekvens av 120 gånger per minut är dess period - tidsintervallet mellan slag - en halv sekund (60 sekunder dividerat med 120 slag). Frekvens är en viktig parameter som används inom vetenskap och teknik för att specificera hastigheten för svängningar och vibrationsfenomen, såsom mekaniska vibrationer, ljudsignaler (ljud), radiovågor och ljus.

Hämtat från:https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency

Glossary

Förhållande: I matematik är ett förhållande sambandet mellan två siffror som indikerar hur många gånger det första numret innehåller det andra. Till exempel, om en skål frukt innehåller åtta apelsiner och sex citroner, är förhållandet mellan apelsiner och citroner åtta till sex (det vill säga 8:6, vilket motsvarar förhållandet 4:3). På samma sätt är förhållandet mellan citroner och apelsiner 6:8 (eller 3:4) och förhållandet mellan apelsiner och den totala mängden frukt är 8:14 (eller 4:7).

Hämtat från: https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio

Intervall (musik): I musikteori är ett intervall skillnaden i tonhöjd mellan två ljud. Ett intervall kan beskrivas som horisontellt, linjärt eller melodiskt om det avser successivt ljudsignaler, såsom två intilliggande tonhöjder i en melodi, och vertikalt eller harmoniskt om det avser samtidigt ljudande toner, såsom i ett ackord. I västerländsk musik är intervaller oftast skillnader mellan toner i diatonisk skala. Det minsta av dessa intervall är en halvton. Intervaller mindre än en halvton kallas mikrotoner. De kan bildas med hjälp av tonerna i olika typer av icke-diatoniska skalor. Några av de allra minsta kallas komma och beskriver små avvikelser, som observeras i vissa avstämningssystem, mellan enharmoniskt ekvivalenta noter som C♯ och D♭. Intervaller kan vara väldigt små och till och med omöjliga för det mänskliga örat.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Hämtat från: https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music)

Kvart: Intervall mellan en not och en annan, som är tre grader från den första, inom en skala.

Liten decima: I musikteorin i västerländsk kultur är en liten decima ett musikaliskt intervall som omfattar tre halva steg, eller halvtoner.

Oktav: I musik är en oktav (latin: oktav: åttonde) eller perfekt oktav (ibland kallad **diapason**) intervallet mellan en musikalisk tonhöjd och en annan med dubbelt dess frekvens. Oktavförhållandet är ett naturfenomen som har hänvisats till som "det grundläggande musikaliska miraklet", vars användning är "vanligt i de flesta musikaliska system". Intervallet mellan den första och den andra harmoniken i den harmoniska serien är en oktav. I musiknotation har noter separerade av en oktav (eller flera oktaver) samma bokstavsnamn och har samma tonhöjdsklass. För att betona att det är ett av de perfekta intervallen (inklusive unison, perfekt fjärde och perfekt femte) betecknas oktaven P8. Andra intervallkvaliteter är också möjliga, men sällsynta. Oktaven ovan eller under en angiven not är ibland förkortad 8a eller 8va (italienska: all'ottava), 8va bassa (italienska: all'ottava bassa, ibland också 8vb), eller helt enkelt 8 för oktaven i den riktning som anges genom att placera detta markera över eller under staven på noten.

Hämtat från: https://en.wikipedia.org/wiki/Octave

Perfekt kvint: Intervall mellan en not och en annan, som är fyra grader från den första, inom en skala.

Pythagoras: Pythagoras från Samos (ca 570 - ca 495 f.Kr.) var en forntida jonisk grekisk filosof och den som namngav Pythagoreanismen. Hans politiska och religiösa läror var välkända i antikens Grekland och påverkade Platon, Aristoteles och, genom dem, västerländsk filosofi. Kunskapen om hans liv har blandats samman med legenden om det, men han verkar ha varit son till Mnesarchus, en graverare på ön Samos. Moderna forskare håller inte med om Pythagoras utbildning och inflytande, men de håller med om att han omkring 530 f.Kr. reste till Croton, där han grundade en skola där initierade svor tillit och levde en gemensam, asketisk livsstil. Denna livsstil innebar ett antal dietförbud, som traditionellt sägs ha inkluderat vegetarianism, även

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

om moderna forskare tvivlar på att han någonsin förespråkade för fullständig vegetarianism.

Hämtat från: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

Stor decima: I klassisk musik från västerländsk kultur är en decima ett musikaliskt intervall som omfattar tre stavspositioner (se **intervall** för mer information), och den stora deciman är en decima som spänner över fyra halvtoner. Tillsammans med den mindre deciman är den stora deciman en av två vanligt förekommande deciman. Den räknas som stor eftersom den är den största av de två: den stora deciman sträcker sig över fyra halvtoner, den mindre tre.

Tonhöjd: Ljud som människan kan höra är vanligtvis över 5 KHz.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom toner

Vi tar det steg för steg:

- ✓ Ljud kommer av luftvibrationer
- ✓ Antalet vibrationer per sekund kallas frekvens och mäts i *Hertz.*
- ✓ Ljudfrekvensen bestämmer tonhöjden (se ordlista) (ju högre frekvens, desto högre tonhöjd).
- ✓ Musiktoner är ljud från vissa frekvenser I en stigande ordning med frekvenser som ger en musikalisk skala.
- ✓ Tänk dig två tonhöjder (frekvenser) som är åtskilda med ett visst avstånd, i. Om vi har två frekvenser, f1 och f2, separeras de av intervallavståndet i1. Observera att intervall är en kombination av två av dessa ljud).
- ✓ Nu kan förhållandet mellan de två frekvenserna (f2 / f1) definieras som r1 och kan uttryckas som:

$$f2 \div f1 = r1$$

- ✓ Om vi har ytterligare en uppsättning frekvenser, f3 och f4 skulle intervallet mellan dem kallas r2. Om i1 och i2 har samma intervall betyder det att det är samma fekvensavstånd mellan f1 och f2 som mellan f3 och f4 och då blir förhållandet det samma. Detta säger dock inget om typen av frekvenser, bara att intervallet är liknande (vi vet inte om de är av samma typ). Vi skulle formulera det som:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f4 \div f3 = r2$$

$$i1 \cong i2 \text{ if and only if } r1 = r2$$

- ✓ Om vi har tre frekvenser f1, f2 och f3 blir intervallet mellan f1 och f2 i1, intervallet mellan f2 och f3 i2 och det större intervallet mellan f1 och f3 i3. Om man

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

tillämpar samma begrepp med beräknade förhållanden i de tidigare exemplen får man:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f3 \div f2 = r2$$

$$f3 \div f1 = r3$$

$$\therefore f2 = r1 \cdot f1 \; and \; f3 = r2 \cdot f2$$

$$Substituting \; in \; for \; f2$$

$$f3 = r2 \cdot (r1 \cdot f1)$$

$$f3 \div f1 = r2 \cdot r1$$

$$substituting \; r3 \; for \; f3 \div f1$$

$$r3 = r2 \cdot r1 \; and \; i3 = i1 + i2$$

- ✓ Detta visar att lägga till intervaller är lika med att multiplicera frekvensförhållandena.

$$since \; r3 = r2 \cdot r1$$

$$\log(r3) = \log(r2) + \log(r1)$$

$$since \; i3 = i2 + i1 \; we \; can \; show \; that$$

$$i3 = \log(r3) \; and \; i2 = \log(r2) \; and \; i1 = \log(r1)$$

- ✓ Nu har vi ett definierat värde för i. Det är loggen över förhållandet mellan frekvenserna som omfattar intervallet i fråga. Frekvensförhållandet för varje givet intervall kommer att vara positivt, men det kan vara större än eller mindre än 1. Om värdet på r är större än 1, vet vi att 0 <f1 <f2 och intervallet är stigande (eftersom f2 är större än f1). På samma sätt, om 0 <r <1, då 0 <f2 <f1 vet vi att intervallet faller. Därför kommer loggen för ett stigande intervall (med r> 1) att vara positiv medan loggen för ett fallande intervall (med r <1) kommer att vara negativ.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- I pianospel innebär att spela DO och RE tillsammans ett stort andra intervall eftersom RE är den andra tonen i skalan
- Nästa är en liten decima eftersom MI är den tredje tonen i skalan
- Från DO till FA kallas det det perfekta stora decimat
- Från DO till SOL som är den femte tonen kallas den perfekta kvinten och så vidare
- Slutligen kallas en DO och DO som spelas tillsammans en oktav (Se nu https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug till 2:08).
- Nu vet vi hur man bestämmer förhållandet mellan ett intervall bildat från andra förhållanden. Om vi till exempel visste att ett intervall (r1) hade ett förhållande på 5/4 (som du kommer att känna igen som en större tredjedel om du kan din övertonsserie) och en annan (r2) förhållandet 6/5 (en liten decima) kan vi beräkna förhållandet mellan deras summa. Så en stor decima (5/4) plus en liten decima (6/5) ger:

$$r1 \cdot r2 = r3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

- Slutligen kallas en DO och DO som spelas tillsammans en oktav (Se nu https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug Förhållandet 3/2 är en perfekt kvint. Alltså bevisade vi matematiskt från ett exempel att en stor decima plus en liten decima ger en perfekt kvint! Här är en snabb uppfriskning avheltonsförhållanden så att du kan prova några andra exempel på egen hand:

2/1	Octave
3/2	Perfect Fifth
4/3	Perfect Fourth
5/3	Major Sixth
5/4	Major Third
6/5	Minor Third

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- ✓ Vi har tagit det okvantifierade exemplet för ett intervall, härlett ett verkligt talvärde för det från frekvensförhållandet och använt vår formel för att beräkna kvoten för ett resulterande intervall.
- ✓ Vi ska nu ta fram formler för att beräkna frekvenser, definiera vad en ton är, bestämma en metod för att hitta funktionen för vilket intervall som helst och visa att skalan bygger på funktioner (och hur man använder dem).
- ✓ Alla intervall kan beskrivas som olika kombinationer av en oktav, en perfekt kvint och/eller en stor decima - de tre första övertonerna.

- ✓ Alltså:

- o intervallers förhållanden är alltid större än 1 och mindre än 2;
- o Ett förhållande på 2:1 är en oktav; alla andra intervaller är mindre än en oktav.

- ✓ Följande slutstaser kan dras om övertonsserier:
    - o 1:1 är starttonen,
    - o 2:1 är en oktav högre,
    - o 3:1 är en kvint ovanför oktaven,
    - o 4:1 är den andra oktaven och 5:1 är en tredjedel in i den andra oktaven.

- ✓ Vi ska nu försöka hitta ett sätt att skriva kvinten och decimat som frekvenser inom den första oktaven. Vi kan ta för givet att förhållandet måste vara större än 1:1 och mindre än 2:1 vilket är hur oktaverna uttrycks.
- ✓ Därför kan vi dividera frekvensförhållandet med antalet oktaver som behövs och därmed nå det första oktavområdet.

    - Exempelvis utgör förhållandet 3:1 en perfekt kvint och hamnar i den andra oktaven. Följaktligen borde vi bara få ner den med en oktav för att få ett förhållande mellan 1 och 2. Detta kan uttryckas på följande sätt:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Låt oss uttrycka med bokstaven q /1 ett intervall där q alltid ska vara större än 2 och samtidigt ett primtal. För att uppnå en oktavreduktion måste vi hitta ett tal n som följer följande formel:

$$1 < \frac{q}{2^n} < 2$$

$$\Rightarrow \ 2^n < q < 2 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow \ 2^n < q < 2^{n+1}$$

- ✓ Vi har nu visat att ett primtalsförhållande kan överföras till en oktav.

- ✓ De **första tre intervallerna** som följer av formeln är: 2:1 som är en oktav, 3:2 som är en perfekt kvint och 5:4 som är en stor decima.

- ✓ Kommer du ihåg att intervallängden ges av logaritmen för dess förhållande? Man kan använda variabler för att uttrycka längden på de tre första grundintervallerna:

$$a = \log(2)$$

$$b = \log(3/2)$$

$$c = \log(5/4)$$

- ✓ Nu när vi har uttryckt variablerna a, b och c som längden på intervallet (som kan uppskattas genom logaritmen för frekvensförhållandet) kommer vi att göra följande uppgifter för att bevisa en metod för att bestämma sammansättningen av något annat intervall som en kombination av dessa tre.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFT

Huvuduppgift: Bevisa att vilket intervall som helst kan bestämmas som en kombination av intervall a, b och c som visades i föregående stycke.

TIPS 1: Kom ihåg att de tre grundläggande intervallen redan är definierade.

a= log (2)

b= log (3/2)

c=log (5/4)

TIPS 2: Använd tre nya variabler, m, n och s för att multiplicera med de första (a, b och c). Tänk på att summan av dessa kommer att vara längden på det okända intervallet vi försöker bestämma;

Längden på det nya intervallet kan skrivas som:

ma + nb + sc

Hjälpuppgifter:

Genom att besvara hjälpuppgifterna kommer du att kunna svara på huvuduppgiften ("Bevisa att vilket intervall som helst kan bestämmas som en kombination av intervall a, b och c definierade i föregående stycke")

(a) Med tanke på att längden på detta nya intervall är ma + nb + sc, hur kan vi definiera dess förhållande??

(b) Utifrån dina resultat från de tidigare frågorna, kan du uppskatta summan av en perfekt kvint och en stor decima?
Tips: Du kan bestämma en perfekt kvint med variabeln b och en stor decima med variabeln c.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Musik i matematiken:

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

TED TALK: Musik och matematik: Beethoven

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

Hemsidor:

Math central: http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

Kent State Univeristy: https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/

Mathematics and Music: http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/

Math and Music Lessons: https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/

Böcker:

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. Arts Education Policy Review, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). How Music and Mathematics Relate. The Great Courses, Virginia. Retrieved from http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher,R.H.,Shaw,G.I.,Levine,I. J.,Wright,E.L.,Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.