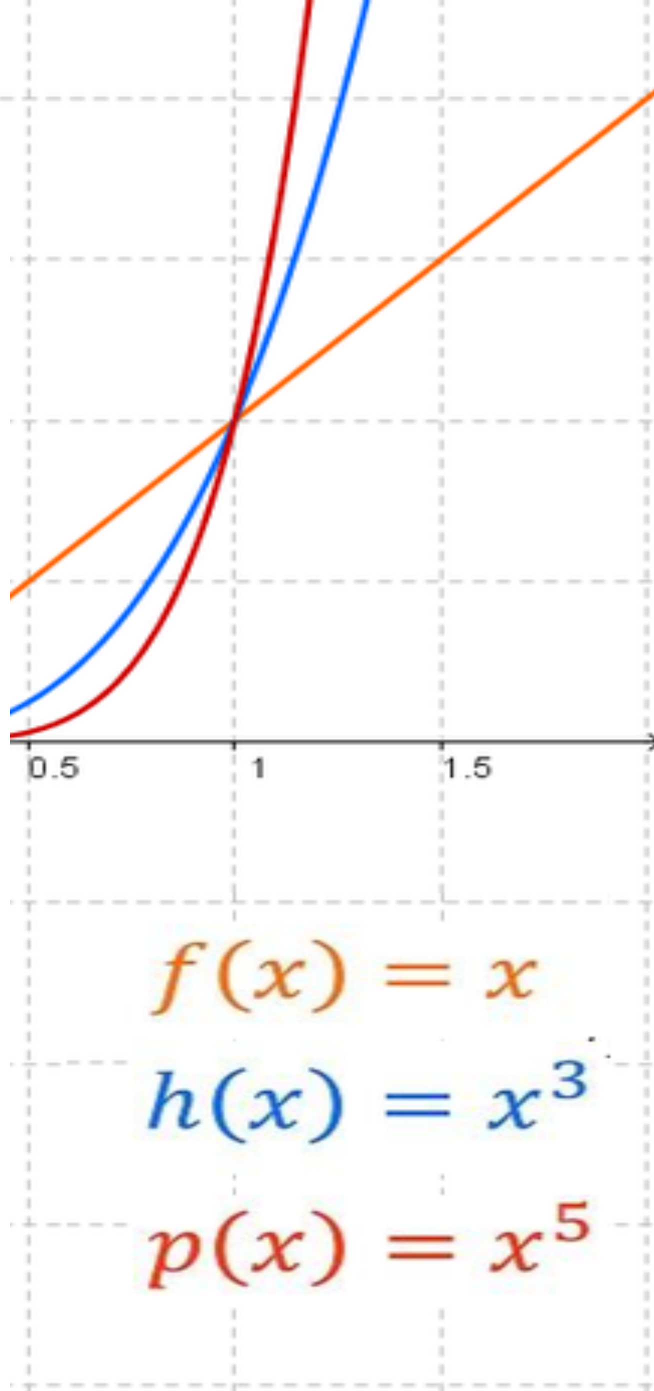
DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER 13 – 15



Power function graph degree 1 3 5
(Source: J Hokkanen from Wiki Commons)

UPPGIFT 18: POTENSER I 12-TONSSKALAN

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Potenser i 12-tonsskalan

Ålder: 13 – 15 år

Längd: 3 timmar

Matematikinnehåll: Krafter, krafters egenskaper, att räkna på krafter

Konstinnehåll: 12-tonsskala, toner och toners frekvenser

Allmänna mål: Att förstå potenser, potensers egenskaper och att räkna på potenser

Instruktioner: Man kommer att behöva använda en kraftfull miniräknare (den onlinegrafiska kalkylatorn Desmos funkar), så att eleven kan beräkna exponenter i en kalkylator och verifiera uppgifternas resultat/lösningar

Resurser: Dator med internetuppkoppling; Tillgång till webbplatsen: https://www.desmos.com/

Tips till läraren: Börja med att ge ett eller två exempel på varje operativ regel med ökande svårighetsgrad för att visa hur eleverna ska gå vidare, så att de sedan kan lösa uppgifter på egen hand.

Mål:

I slutet av denna uppgift ska eleven:

- behärska reglerna för potenser;
- kunna beräkna värdet på numeriska uttryck genom att använda reglerna för potenser.

Utvärdering

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	**1.** **2.** **3.**
Skriv 2 saker som du lärt dig	**1.** **2.**
Skriv 1 sak som kan förbättras	**1.**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Matematik och musik har alltid hängt ihop. Men det var först under sjätte århundradet f.v.t. som de första bevisen på detta förhållande upptäcktes. Pythagoras jämförde ljudet som producerades av hammare av olika storlekar, som användes av smeder, med ljudet från monokorden, som man tror att Pythagoras var uppfinnaren.

Denna jämförelse gjorde det möjligt för Pythagoras att upptäcka och utforska de matematiska orsakerna bakom ljuden genom att studera ljuden som producerades av monokorden. Han delade strängen i två lika delar, sedan i tre lika delar och så vidare. Han matchade ljuden matematiskt enligt de underavdelningar han skapade och skapade den pythagoreiska skalan, där varje ton hade en väldefinierad relation med den andra.

Många människor och kulturer har skapat sina egna skalor. Ett exempel var det kinesiska folket som har skapade den pentatoniska skalan. Västerländsk kultur antog emellertid en 12-tonsskala, känd som en tempererad eller kromatisk skala.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Potenser i tolvtonsskalan

Under sjätte århundradet f.v.t. använde Pythagoras monokorden för att studera förhållandet mellan längden på den vibrerande strängen och den musikaliska tonen den producerar. Föreställ dig en sträng som är utsträckt och fixerad i båda ändarna. När en ända av strängen berörs, vibrerar den och producerar en ton som kallas en grundton. Pythagoras delade sedan strängen i två lika delar, sedan i tre och så vidare. När han fortsatte att dela upp strängen, hitta harmonin i grundtonerna och matematiskt kombinera ljuden skapade han skalor som resulterade i toner som var naturligt relaterade till varandra.

Genom att hålla samma intervall (numeriskt förhållande 3/2) mellan tonerna och genom att börja från oktavintervallet som ges av frekvenserna $\mathbf{f_0}$och $\mathbf{2f_0}$, kan den pythagoriska diatoniska skalan bildas. De toner man får, vanligtvis kända som C, R, E, F, G, A och B, representeras i de flesta länder av solfège-namnen Do-Re – Mi – Fa – Sol – La – Ti (eller Si). Enligt mönstret C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La och B-Ti (eller Si), bildas den så kallade diatoniska skalan med sju toner som i århundraden har varit grunden för andra skalor.

Från medeltiden och framåt märkte man att vissa toner var för nära varandra (till exempel B och C) så man skapade en skala där frekvensintervallet mellan alla toner skulle vara det samma. Värdet på det är intervallet mellan tonerna C och B (en halvton). Som ett resultat bildades och utvecklades en 12-tonsskala av J. S. Bach.

Till skillnad från Pythagoras som hade bildat den diatoniska skalan genom att få 7 toner genom en division som kan representeras av bråk, kan representeras denna nya skala av potenser av 2 och resulterade i 12 toner: C, C #, D, D #, E, F, F #, G, G #, A, A # och B.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ton	Halvton	Tempererad skala
C	0	$2^0 = 1$
C#	1	$2^{1/12}$
D	2	$2^{2/12}$
D#	3	$2^{3/12}$
E	4	$2^{4/12}$
F	5	$2^{5/12}$
F#	6	$2^{6/12}$
G	7	$2^{7/12}$
G#	8	$2^{8/12}$
A	9	$2^{9/12}$
A#	10	$2^{10/12}$
B	11	$2^{11/12}$
C (octave)	12	$2^1 = 2$

Tabell 1: Oktavdelning i jämn skala

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

#: Symbol som heter "korsförtecken" som höjer en ton ett halvt steg.

Diatonisk skala: en uppdelning av en oktav i sju tonsteg.

Frekvens: : fysisk enhet som anger antalet händelser i en serie under en given tidsperiod.

Grundfrekvens: den lägsta och starkaste frekvensen i en harmonisk serie för ett ljud.

Grundton: huvudton i ett ackord, som de andra ackorden härrör från.

Halvton: intervall som är en halv ton och som utgör minsta avstånd i det traditionella västra musiksystemet.

Harmoni: samtidig kombination av ljud.

Monokord: ett gammalt musikinstrument bestående av en resonanslåda, med en enda sträng fäst med två mobila stöd.

Oktav: intervall mellan en ton och en annan med hälften eller två gånger frekvensen.

(Musikalisk) Skala: ordnad tonföljd efter vibrationsfrekvensen för ljud (vanligtvis från ljud med lägsta frekvens till högsta frekvens).

Tempererad Skala: uppdelning av oktaven i tolv lika halvtoner.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom den tempererade skalan

Som vi har sett tidigare delades den tempererade skalan upp i 12 toner. Tonhöjden för nästa ton erhålls genom att multiplicera tonhöjdsvärdet för den tidigare tonen med potenser av 2, det vill säga $\mathbf{2^{1/12}}$.

Exempel: $\mathbf{Tempererad\ stämning\ av\ tonen\ D} = \mathbf{2^{1/12}} \times$

$\mathbf{Tempererad\ stämning\ av\ tonen\ c\#} = \mathbf{2^{1/12}} \times \mathbf{2^{1/12}} = \mathbf{2^{2/12}}$

För att bättre förstå potenser studerar vi detta koncept och dess egenskaper.

Exponent

När faktorerna är lika i en multiplikation, kan vi representera dem i form av potens.

Till exempel: $\mathbf{2 \times 2 \times 2 = 2^3}$

Bas: 2 (faktorn som upprepas);

Exponent: 3 (antalet gånger faktorn upprepas).

Potensers egenskaper

Produkten av potenser med samma bas blir en potens med samma bas och en exponent som är lika med summan av exponenterna. $\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}; a} \in \mathbb{R}; \mathbf{m} \in \mathbb{Z}$ och $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$

Exempel: $\mathbf{3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6}$ och $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

Produkten av potenser med samma exponenter blir en potens med samma exponent och en bas som är lika med multiplikationen av baserna.

$$\mathbf{a^m \times b^m = (a\ x\ b)^m; a} \in \mathbb{R}; \mathbf{b} \in \mathbb{R} \text{ and } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}$$

Exempel: $\mathbf{3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2}$ och $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{25}\right)^2$

Kvoten av potenser med samma bas blir en potens med samma bas och med exponenten lika med differensen mellan exponenterna.

$$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}; a} \in \mathbb{R}\backslash\{\mathbf{0}\}; \mathbf{m} \in \mathbb{Z} \text{ and } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$$

Exempel: $\mathbf{3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2}$ och $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Kvoten av potenser med samma exponent blir en potens med samma exponent och med basen lika med kvoten av baserna.

$$\boldsymbol{a^m : b^m = (a : b)^m; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}} \text{ och } \boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$$

Exempel: $3^2 : 4^2 = (3 : 4)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ och $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} : \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{20}\right)^2$

Potens av potens är en potens med samma bas vars exponent är lika med produkten av exponenterna.

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{m\times n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z}} \text{ och } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$$

Exempel: $(4^3)^2 = 4^{3\times 2} = 4^6$ och $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\times 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Potens med bas 0: $\boldsymbol{0^n = 0}$ med $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$

Exempel: $0^4 = 0$

Potens med exponent 0: $\boldsymbol{a^0 = 1}$ med $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$

Exempel: $5^0 = 1$

Potens med bas 1: $\boldsymbol{1^n = 1}$ med $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$

Exempel: $1^4 = 1$

Potens med exponent 1: $\boldsymbol{a^1 = a}$ med $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$

Exempel: $5^1 = 5$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Potens med negativ exponent:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} = \frac{1}{a^{n}}} \text{ och } \boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}};\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\} \text{ och } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Exempel: $\mathbf{3^{-4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} = \frac{1}{3^{4}}$ och $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{3^{2}}{2^{2}}$

Potens med reell exponent:

$$\mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}};\ a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}}$$

Exempel: $\mathbf{3^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[2]{3^{5}} = \sqrt{3^{5}}$ och $\mathbf{5^{\frac{-2}{3}}} = \sqrt[3]{5^{-2}}$

Kännetecken:

- En potens med positiv bas och naturlig exponent är positiv;
- En potens med negativ bas och en naturlig exponent är:

  - positiv om exponenten är ett jämnt tal;

  - negativ om exponenten är ett udda nummer.

  $(-a)^{n} = a^{n}$ om n är ett jämnt tal.

  $(-a)^{n} = -a^{n}$ om n är ett udda tal;
- $(a^{m})^{n}$ och $a^{m^{n}}$ ger för det mesta olika resultat eftersom $(a^{m})^{n} = (a^{m}) \times (a^{m}) \times \ldots \times (a^{m})$ (n gånger) och $a^{m^{n}} = a^{m \times m \times \ldots \times m}$ (n gånger)

  Exempel: $(5^{2})^{3} = 5^{2\times 3} = 5^{6}$ och $5^{2^{3}} = 5^{8}$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFTER

UPPGIFT 1

Beräkna:

1.1. $(-2)^3$ **1.2.** 1^5 **1.3.** $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ **1.4.** 0^{10} **1.5.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

UPPGIFT 2

Fyll i luckorna:

2.1. $4^3 \times 4^5 = 4^{\dots}$;

2.2. $(-3)^{\dots} \times (-3)^5 = (-3)^8$;

2.3. $5^7 : 5^5 = 5^{\dots}$;

2.4. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{\dots} : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3$;

2.5. $\left(3^5\right)^{\dots} = 3^{10}$;

2.6. $\left(\dots^5\right)^3 = 3^{15}$;

2.7. $\left(\frac{27}{8}\right)^2 = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^6$

UPPGIFT 3

Förenkla följande potenser till en potens med positive exponent:

3.1. $4^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

3.2. $\left(3^{-2}\right)^6 \times 5^{12}$

3.3. $\frac{5^{-8}}{5^3}$

3.4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-12}$

UPPGIFT 4

Beräkna vart och ett av följande uttryck, använd reglerna för potenser:

4.1. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7} \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

4.2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} : 2^7 + (0,1)^{-1}$;

4.3. $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}}{\left(1 - \frac{2}{5}\right)^{10}}$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Kromatisk skala

https://www.youtube.com/watch?v=2gy6E3X2mKQ

Exponenter och produkt

https://www.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals/pre-algebra-exponent-properties/v/exponent-properties-involving-products

Exponenters egenskaper

https://www.mathplanet.com/education/algebra-1/exponents-and-exponential-functions/properties-of-exponents

Exponentregler - NCERT sjuans mattelösningar

https://www.youtube.com/watch?v=9VuLwo1FBys

12-tonsskala

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx

Varför 12 toner I skalan?

https://www.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/tuning/12.html

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.