“Sheet Music”
(Source: https://www.pexels.com/photo/black-and-white-keys-music-note-534283/)

DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 13 –15

UPPGIFT 16: SIFFERSERIER I HARMONISKA SERIER

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Lärarguide

Titel: Sifferserier i harmoniska serier

Ålder: 13 – 15 år

Längd: 3 timmar

Matematikinnehåll: Sifferserier

Konstinnehåll: Harmoniska serier i musik, toner och toners frekvenser

Allmänna mål: Att förstå numeriska serier och kunna beräkna några av dess termer, liksom okända termer

Instruktioner: För att eleverna ska få en tydligare bild av vibrationslägena, låt dem titta på "Lägen på en sträng" -video (se "Lär dig mer ...") efter respektive förklaring.

Resurser: En penna; Uppgift 1 kräver en papperslåda, ett gummiband och två kritor.

Tips till läraren: Börja med att ge några exempel på numeriska serier för att förklara konceptet och sedan hur man slutför dem. Förklara hur man beräknar termer för numeriska serier genom att visa ett exempel.

Mål:

I slutet av denna uppgift ska eleven kunna:

- Identifiera numeriska serier;
- Beräkna termer i numeriska serier;
- Beräkna okända termer i numeriska serier

Utvärdering

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	**1.** **2.** **3.**
Skriv 2 saker som du lärt dig	**1.** **2.**
Skriv 1 sak som kan förbättras	**1.**

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Inledning

Matematik och musik har alltid hängt ihop. Men det var först under sjätte århundradet f.v.t. som de första bevisen på detta förhållande upptäcktes. Pythagoras jämförde ljudet som producerades av hammare av olika storlekar, som användes av smeder, med ljudet från monokorden, som man tror att Pythagoras var uppfinnaren.

Denna jämförelse gjorde det möjligt för Pythagoras att upptäcka och utforska de matematiska orsakerna bakom ljuden genom att studera ljuden som producerades av monokorden. Han delade strängen i två lika delar, sedan i tre lika delar och så vidare. Han matchade ljuden matematiskt enligt de underavdelningar han skapade och skapade den pythagoreiska skalan, där varje ton hade en väldefinierad relation med den andra.

Många människor och kulturer har skapat sina egna skalor. Ett exempel var det kinesiska folket som har skapade den pentatoniska skalan. Västerländsk kultur antog emellertid en 12-tonsskala, känd som en tempererad eller kromatisk skala.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Harmoniska serier

Det är allmänt känt att de naturliga tonerna är A, B, C, D, E, F och G. Trots detta representeras dessa i de flesta länder av den så kallade solfegeskalan Do – Re – Mi – Fa – Sol – La – Ti (eller Si) enligt följande: C-Do, D-Re, E-Mi, F-Fa, G-Sol, A-La och B-Ti (eller Si). Definitionen av dessa toner påverkades i stor utsträckning av matematik.

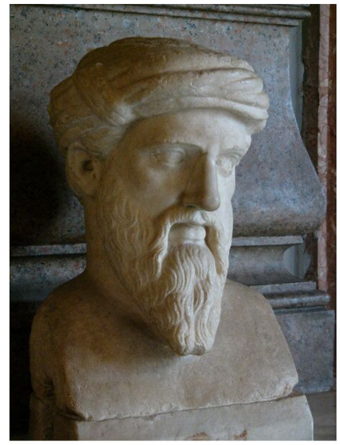


Bild 1 – Byst av Pythagoras
(Källa:https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

Under sjätte århundradet f.v.t. insåg Pythagoras att en sträng som vibrerar inte bara vibrerar i sin fulla utsträckning, utan den bildade också en serie noder, som delar upp i mindre sektioner, partierna, som vibrerar vid frekvenser som är högre än det grundläggande.

För att studera förhållandet mellan längden på den vibrerande strängen och den musikaliska tonen som produceras av den, använde Pythagoras en monokord.

Bild 2 visar noder och partiella delar av de första fyra frekvenserna i en serie. För en enkel förståelse visas de separat, men på en verklig sträng överlappar alla varandra, vilket genererar en komplex design, liknande instrumentets vågform.

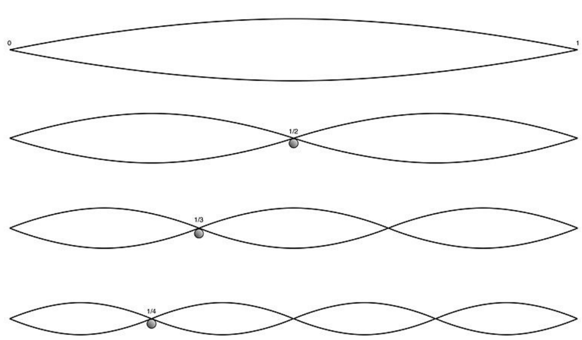


Bild 2 – Vibrationssätt och de första 4 harmonierna
((Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Föreställ dig en spänd sträng som sitter fast i sina ändar. När vi rör den ena änden av den här strängen, vibrerar den (bild 3) och producerar en ton som kallas en grundton.

Bild 3 – Vibrationssätt för en grundton1(f)
(Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pythagoras beslutade att dela en sträng i två delar (bild 4) och röra vid en av delarna i mitten. Ljudet som producerades var detsamma, men med en högre frekvens (vanligtvis uttryckt som "samma ton, en oktav högre"). Det har sedan bevisats att närhelst antalet uppdelningar (eller det harmoniska antalet) är ett multipel av ett tidigare nummer, så kommer ljudet att upprepas men med en högre tonhöjd.

Bild 4 – Vibrationssätt för en grundton 2(f)
(Source:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Han bestämde sig sedan för att prova hur det skulle låta om strängen delades upp i 3 delar (bild 5) och märkte att ett nytt ljud, annorlunda än det föregående, hördes. Den här gången var det inte den "samma ton, en oktav högre", utan en helt annan ton, som förtjänade ett annat namn – en kvint.

Fig. 5 – Vibrationssätt för en grundton 3(f)
(Källa:https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%AAncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Ljudet, även om det var annorlunda, matchade bra med det föregående ljudet. Det skapade en trevlig harmoni i örat, som hade att göra med det faktum att uppdelningarna hade de matematiska relationerna 1/2 och 2/3. Med delningen av strängen i fyra delar fick han en ton som nu kallas ”decima”. Dessa tre toner överensstämmer med den grundtonen.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

På detta vis fortsatte han att dela strängen, erhålla harmoniken i den grundläggande tonen, och genom att matematiskt kombinera ljuden skapade han skalor som resulterar i toner som är naturligt relaterade till varandra. Med tiden har tonerna fått de namn vi känner till idag.

I denna process påverkas varje ton av den grundläggande frekvensen som skapar andra övertoner, vilket resulterar i en serie frekvenser - den harmoniska serien. De harmoniska serierna är oändliga serier, sammansatta av sinusformade vågor med alla heltalets flera frekvenser för grundfrekvensen. Det finns inte en, enkel, harmonisk serie utan snarare en serie för varje grundläggande frekvens.

Vi tittar på ett exempel på en harmonisk serie som börjar vid A2/Lá1 (110 Hz). De första 16 övertonerna för den serien kan ses i följande tabell:

Harmoni #	Ton (Svenska)	Ton (Latin)	Frekvnes (Hz)
1 (F)	A_2	$Lá_1$	110
2	A_3	$Lá_2$	220
3	E_4	Mi_3	330
4	A_5	$Lá_3$	440
5	$C^{\#}_5$	$Do^{\#}_4$	550
6	E_4	Mi_4	660
7	G_4	Sol_4	770
8	A_5	$Lá_4$	880
9	B_5	Si_4	990
10	$C^{\#}_6$	$Do^{\#}_5$	1100
11	$D^{\#}_6$	$Ré^{\#}_5$	1210
12	E_6	Mi_5	1320
13	$F^{\#}_6$	$Fá^{\#}_5$	1430
14	G_6	Sol_5	1540
15	$G^{\#}_5$	$Sol^{\#}_5$	1650
16	A_6	$Lá_5$	1760

Tabell 1 – Första 16 harmoniena

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Ordlista

Decima: intervall mellan en ton och en annan, som är tre toner från den första, inom samma skala.

Frekvens: fysisk enhet som anger antalet händelser i en serie under en given tidsperiod.

Grundfrekvens: den lägsta och starkaste frekvensen i en harmonisk serie för ett ljud.

Grundton: huvudton i ett ackord, som de andra ackorden härrör från

Harmoni: samtidig kombination av ljud.

Harmonisk serie: uppsättning vågor sammansatta av grundfrekvensen och alla heltalsmultiplar för denna frekvens.

Kvint: intervall mellan en ton och och en annan, som ligger fyra toner från den första, inom samma skala.

Monokord: ett gammalt musikinstrument bestående av en resonanslåda, med en enda sträng fäst med två mobila stöd.

Oktav: intervall mellan en ton och en annan med hälften eller två gånger frekvensen.

Pentatonisk skala: alla skalor som består av fem toner eller fler.

(Musikalisk) Skala: ordnad tonföljd efter vibrationsfrekvensen för ljud (vanligtvis från ljud med lägsta frekvens till högsta frekvens).

Tempererad Skala: uppdelning av oktaven i tolv lika halvtoner.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Matematiken bakom harmoniska serier: numeriska serier

Pythagoras uppdelningar på monokordsträngen motsvarar enhetens uppdelning med naturliga siffror, d.v.s. följer sekvensen 1, 2, 3, 4, ..., n. Med andra ord motsvarar de sekvensen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$. När det gäller vibrationer, skulle motsvarigheten vara sekvensen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}$.

Numeriska sekvenser

En **sekvens** eller succession är en uppsättning föremål av vilken art som helst, organiserade eller skrivna i en specifik ordning.

Till exempel:

Uppsättningen januari, februari, mars, april, ... december är en sekvens eller följd av årets månader.

Uppsättningen 0, 1, 2, 3, 4, ... kallas sekvens eller följd av naturliga nummer.

En **numerisk sekvens** är en funktion som har en domän som är naturliga tal och som har en underdomän (mål) som är verkliga tal.

Numeriska sekvenser kan vara finita när det är möjligt att "räkna" dess element, eller infinita, när det inte är möjligt att "räkna" dess element. Se nedan de matematiska representationerna för båda situationerna:

Finit sekvens: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

Infinit sekvens: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$

Hur man läser ut det:

$a_1 \rightarrow a$ index 1 (första termen, eller första ordningen)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

$a_2 \rightarrow a$ index 2 (andra termen eller andra ordningen)

$a_3 \rightarrow a$ index 3 (tredje termen eller tredje ordningen)

$a_n \rightarrow a$ index n (n:te termen eller n:te ordningen)

Ta en titt på exemplen på finita och infinita sekvenser:
Finit sekvens: (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)
Infinit sekvens: (3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)

Sekvenserna kommer för det mesta av en matematisk formel som kallas **den allmänna termen**. Detta är lagen om bildande som definierar någon av termerna i sekvensen.

Exempel:

1) Givet den sekvens som definieras av $a_n = 4n - 1$, with $n \in \mathbb{N}$, beräkna första och tredje termen.

Kom ihåg att domänen för denna sekvens är $\mathbb{N}$, så den första termen är a_1 och beräknas genom att ersätta $\mathbf{n}$ med 1.

För $\mathbf{n} = \mathbf{1}$, gäller att: $a_1 = 4 \times 1 - 1 = 3$

För $\mathbf{n} = \mathbf{3}$, gäller att: $a_3 = 4 \times 3 - 1 = 11$.

2) Tänk på den aritmetiska sekvensen 5, 8, 11 ...

Den första termen i sekvensen är 5 och efter den första termen erhålls vilken annan term som helst genom att lägga till 3 till ovanstående term.
Se till exempel följande beräkningar relaterade till de första termerna:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

n	Att räkna ut n	
1	5	$= 5 + 0 \times 3 = 5$
2	5 + 3	$= 5 + 1 \times 3 = 8$
3	5 + 3 + 3	$= 5 + 2 \times 3 = 11$
4	5 + 3 + 3 + 3	$= 5 + 3 \times 3 = 14$
5	5 + 3 + 3 + 3 +3	$= 5 + 4 \times 3 = 17$

Tabell 2 – Att beräkna numeriska sekvenser

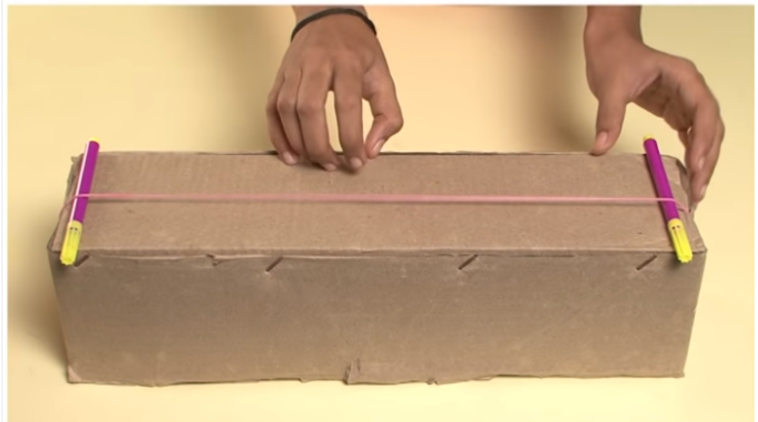
Tabellen visar att vi kan få ordningen för $\boldsymbol{n}$ (där $\boldsymbol{n}$ är vilken term som helt) från den första termen 5 och genom att lägga till förhållandet 3 upprepade gånger $\boldsymbol{n - 1}$ gånger. Detta kan skrivas algebraiskt som $\mathbf{5 + 3(n - 1)}$. Den förenklade versionen av detta uttryck är $\mathbf{3n + 2}$.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

UPPGIFTER

UPPGIFT 1

Med hjälp av en papperslåda, ett gummiband och två kritor, kan man återskapa experimentet som Pythagoras utförde med en monokord.



Observera att genom att ändra läget på en av kritorna, skapas en annan tonhöjd. Ta reda på mer detaljerad information i följande video:

https://www.youtube.com/watch?v=AQJw95-H9mM

UPPGIFT 2

Skriv de första fyra termerna i sekvensen (u_n), om:

2.1) $u_n = 5n - 2$

2.2) $u_n = -3n + 1$

2.3) $u_n = \frac{1}{n}$

2.4) $u_n = \frac{1}{3n}$

2.5) $u_n = \frac{1}{n^3}$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Erasmus+

TheArtOf Maths

UPPGIFT 3

Skriv följande två termer och den allmänna termen för sekvensen, $(\mathbf{u_n})$, när de första termerna är:

3.1) $3, 6, 9, 12, 15, \dots$

3.2) $4, 9, 14, 19, 24, \dots$

3.3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

3.4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

LÄR DIG MER…

Musikens matematik

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Stränglägen

https://www.youtube.com/watch?v=cnH2ltfW48U

De harmoniska serierna

https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/

En sätt att förstå musikaliska intervaller, skalor, stämning och timbre

http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf

Pythagoras och musik

https://ba278b9d8106536501a2-57da1f3fe93ccf3a9828e6ce67c3d52c.ssl.cf5.rackcdn.com/07_richards.pdf

Numeriska sekvenser

https://www.mathsisfun.com/numberpatterns.html

Omvandlingsschema för toner till frekvenser

https://www.audiology.org/sites/default/files/ChasinConversionChart.pdf

This project has been funded with support from the European Commission. This publication reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.