

DEL II: Musik & Matematik

ÅLDER: 13-15

UPPGIFT 14: FÖRHÅLLANDE MELLAN NOTERS FREKVENSER

C.I.P. Citizens In Power



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Lärarguide

Titel: Förhållande mellan noters frekvenser

Ålder: 13-15 år

Längd: 60-70 minuter

Matematikinnehåll: Intervaller, Frekvenser, Förhållande, Logaritmer

Konstinnehåll: Matte i musiknoter.

Övergripande mål: Att visa att lägga till intervaller är lika med att multiplicera frekvenser.

Instruktioner och metodik: Uppgiften är baserad på en allmän introduktion om förhållandet mellan matematik och musik, men det blir lite mer utmanande i "Matematiken bakom"-avsnittet. Vi försöker göra det så "lätt" och förståeligt som möjligt med bilder, exempel, bilder och en YouTube-video.

Tips till läraren: Du kan börja med några allmänna frågor för att väcka elevernas intresse för hur och om de tror att matematik och musik är relaterade. Sedan kan du göra introduktionen snabbt innan du går till avsnittet "Matematiken bakom musiken".

Mål: Ta ett icke-kvantifierat begrepp för ett intervall, erhålla ett verkligt talvärde för det från frekvensförhållandet och använda formeln för att beräkna kvoten för ett resulterande intervall.

Utvärdering

Skriv 3 saker som du tyckte om med denna uppgift	1. 2. 3.
Skriv 2 saker som du lärt dig	1. 2.
Skriv 1 sak som kan förbättras	1.

Inledning

Trots det faktum att många elever kanske älskar musik medan de hatar matte, vet de inte är att de är släkt med varandra och det sägs faktiskt att matematik kan hjälpa oss att förklara den musikaliska upplevelsen. Sedan 1998 visade Grandin, Peterson och Shaw att musik förbättrar resursfärdigheterna, vilket är avgörande för att lära sig matematiska begrepp som proportionellt resonemang och att utveckla geometri. Rauscher et al. (1997) hävdar att musik främjar utvecklingen av sådana kognitiva färdigheter och särskilt att erkänna mönster och använda logik.

Pythagoras insåg redan på 600-talet f.v.t att olika ljud kan göras med olika vikter och vibrationer. Detta ledde till hans upptäckt att tonhöjden för en vibrerande sträng är proportionell mot och kan styras av dess längd. Strängar som är halverade i längd är en oktav högre än originalet. Ju kortare sträng, desto högre tonhöjd. Pythagoras fick också reda på att noter i vissa frekvenser låter bäst med andra frekvenser för den noten. Till exempel låter en ton på 220Hz bäst med noter på 440Hz, 660Hz och liknande. Så du kan redan se att allt från grunderna till den mest komplicerade syntesen är matematik sammanflätad med musik.

3



Bild 1: Diatonisk skala enligt Pythagoras (Hämtad från: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=pAHlvMTRAjeGWM)

Mathematics and Music



- Pythagoras heard blacksmiths striking different sized anvils and producing different notes – in harmony
- He realised there was a mathematical explanation – ratios!

Bild 2: Pythagoras och Musik (Hämtad från: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=kjndmRILmsTNLM)



Frekvenser, intervaller och förhållanden i musik

Några vanliga matematiska begrepp som relaterar till musik är frekvenser, intervaller och förhållanden.

Pythagoras gjorde sina upptäckter genom att "spela" med en sträckt sträng. Nedan ser du en sträckt sträng bunden i dess ändar. När den rörs, vibrerar den. Som vi alla vet innebär en vibrerande sträng på ett instrument att en tryckvåg som rör sig genom luften når vårt öra som ett ljud.



Pythagoras beslutade att dela upp den här strängen i två delar och rörde vid varje ände igen. Ljudet som producerades var detsamma, men mer akut (eftersom det var samma ton en oktav högre):



Pythagoras fortsatte. Han experimenterade med strängen uppdelad i 3 delar:



Det var här han insåg att ett nytt, annat ljud dök upp. Den här gången var det inte samma ton en oktav högre, utan en annan ton som fick ett annat namn. Det här ljudet, förutom att det var annorlunda, fungerade bra med det föregående och skapade en trevlig harmoni i örat. Dessa uppdelningar visade matematikrelationerna **1/2** och **2/3** och tydligen gillar vår hjärna logiska relationer.

På detta vis fortsatte han att göra underavdelningar och kombinationer av ljuden i matematiskt skapade skalor som efteråt bidrog till skapandet av musikinstrument som

kunde spela dessa skalor. Numera har noterna fått de namn vi känner idag. Kulturer har skapat sina egna vågar. Till exempel skapade kineserna den pentatoniska skalan, medan västerländsk kultur antog en 12-tonsskala, även känd som en kromatisk skala.

Källor:

<http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/> and

<http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html>

Ordlista A

Frekvens: Frekvens är antalet händelser i en upprepad serie per tidsenhet. Perioden är tiden för en cykel i en upprepande händelse, så perioden är den ömsesidiga frekvensen. Till exempel: om ett nyfött barns hjärta slår med en frekvens av 120 gånger per minut är dess period - tidsintervallet mellan slag - en halv sekund (60 sekunder dividerat med 120 slag). Frekvens är en viktig parameter som används inom vetenskap och teknik för att specificera hastigheten för svängningar och vibrationsfenomen, såsom mekaniska vibrationer, ljudsignaler (ljud), radiovågor och ljus.

Hämtat från: <https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency>

Förhållande: I matematik är ett förhållande sambandet mellan två siffror som indikerar hur många gånger det första numret innehåller det andra. Till exempel, om en skål frukt innehåller åtta apelsiner och sex citroner, är förhållandet mellan apelsiner och citroner åtta till sex (det vill säga 8:6, vilket motsvarar förhållandet 4:3). På samma sätt är förhållandet mellan citroner och apelsiner 6:8 (eller 3:4) och förhållandet mellan apelsiner och den totala mängden frukt är 8:14 (eller 4:7).

Hämtat från: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio>

Pythagoras: Pythagoras från Samos (ca 570 - ca 495 f.Kr.) var en forntida jonisk grekisk filosof och den som namngav Pythagoreanismen. Hans politiska och religiösa läror var välkända i antikens Grekland och påverkade Platon, Aristoteles och, genom dem, västerländsk filosofi. Kunskapen om hans liv har blandats samman med legenden om det, men han verkar ha varit son till Mnesarchus, en graverare på ön Samos. Moderna forskare håller inte med om Pythagoras utbildning och inflytande, men de håller med om att han omkring 530 f.Kr. reste till Croton, där han grundade en skola där initierade svor tillit och levde en gemensam, asketisk livsstil. Denna livsstil innebar ett antal dietförbud, som traditionellt sägs ha inkluderat vegetarianism, även om moderna forskare tvivlar på att han någonsin förespråkade för fullständig vegetarianism.

Hämtat från: <https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>

Ordlista B

Frekvens: Fysikenhet som anger antalet händelser i en serie under en given tidsperiod.

Intervall (musik): I musikteori är ett intervall skillnaden i tonhöjd mellan två ljud. Ett intervall kan beskrivas som horisontellt, linjärt eller melodiskt om det avser successivt ljudsignaler, såsom två intilliggande tonhöjder i en melodi, och vertikalt eller harmoniskt om det avser samtidigt ljudande toner, såsom i ett ackord. I västerländsk musik är intervaller oftast skillnader mellan toner i diatonisk skala. Det minsta av dessa intervall är en halvton. Intervaller mindre än en halvton kallas mikrotoner. De kan bildas med hjälp av tonerna i olika typer av icke-diatoniska skalor. Några av de allra minsta kallas komma och beskriver små avvikelser, som observeras i vissa avstämningssystem, mellan enharmoniskt ekvivalenta noter som C# och D \flat . Intervaller kan vara väldigt små och till och med omöjliga för det mänskliga örat. Hämtat från: [https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music))

Kvart: Intervall mellan en not och en annan, som är tre grader från den första, inom en skala.

Liten decima: I musikteorin i västerländsk kultur är en liten decima ett musikaliskt intervall som omfattar tre halva steg, eller halvtoner.

Oktav: I musik är en oktav (latin: oktav: åttonde) eller perfekt oktav (ibland kallad **diapason**) intervallet mellan en musikalisk tonhöjd och en annan med dubbelt dess frekvens. Oktavförhållandet är ett naturfenomen som har hänvisats till som "det grundläggande musikaliska miraklet", vars användning är "vanligt i de flesta musikaliska system". Intervallet mellan den första och den andra harmoniken i den harmoniska serien är en oktav. I musiknotation har noter separerade av en oktav (eller flera oktaver) samma bokstavsnamn och har samma tonhöjdsklass. För att betona att det är ett av de perfekta intervallen (inklusive unison, perfekt fjärde och perfekt femte) betecknas oktaven P8. Andra intervallkvaliteter är också möjliga, men sällsynta. Oktaven ovan eller under en angiven not är ibland förkortad 8a eller 8va (italienska: all'ottava), 8va bassa (italienska: all'ottava bassa, ibland också 8vb), eller

helt enkelt 8 för oktaven i den riktning som anges genom att placera detta markera över eller under staven på noten.

Hämtat från: <https://en.wikipedia.org/wiki/Octave>

Perfekt kvint: Intervall mellan en not och en annan, som är fyra grader från den första, inom en skala.

Stor decima: I klassisk musik från västerländsk kultur är en decima ett musikaliskt intervall som omfattar tre stavpositioner (se **intervall** för mer information), och den stora deciman är en decima som spänner över fyra halvtoner. Tillsammans med den mindre deciman är den stora deciman en av två vanligt förekommande deciman. Den räknas som stor eftersom den är den största av de två: den stora deciman sträcker sig över fyra halvtoner, den mindre tre.

Tonhöjd: Ljud som människan kan höra är vanligtvis över 5 KHz.

Matematiken bakom toner

Vi tar det steg för steg:

- ✓ Ljud kommer av luftvibrationer
- ✓ Antalet vibrationer per sekund kallas frekvens och mäts i *Hertz*.
- ✓ Ljutfrekvensen bestämmer tonhöjden (se ordlista) (ju högre frekvens, desto högre tonhöjd).
- ✓ Musiktoner är ljud från vissa frekvenser i en stigande ordning med frekvenser som ger en musikalisk skala.
- ✓ Tänk dig två tonhöjder (frekvenser) som är åtskilda med ett visst avstånd, i . Om vi har två frekvenser, f_1 och f_2 , separeras de av intervallavståndet i_1 . Observera att intervall är en kombination av två av dessa ljud).
- ✓ Nu kan förhållandet mellan de två frekvenserna (f_2 / f_1) definieras som r_1 och kan uttryckas som:

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

- ✓ Om vi har ytterligare en uppsättning frekvenser, f_3 och f_4 skulle intervallet mellan dem kallas r_2 . Om i_1 och i_2 har samma intervall betyder det att det är samma frekvensavstånd mellan f_1 och f_2 som mellan f_3 och f_4 och då blir förhållandet det samma. Detta säger dock inget om typen av frekvenser, bara att intervallet är liknande (vi vet inte om de är av samma typ). Vi skulle formulera det som:

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

$$f_4 \div f_3 = r_2$$

$$i_1 \cong i_2 \text{ if and only if } r_1 = r_2$$

- ✓ Om vi har tre frekvenser f_1 , f_2 och f_3 blir intervallet mellan f_1 och f_2 i_1 , intervallet mellan f_2 och f_3 i_2 och det större intervallet mellan f_1 och f_3 i_3 . Om man

tillämpar samma begrepp med beräknade förhållanden i de tidigare exemplen får man:

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

$$f_3 \div f_2 = r_2$$

$$f_3 \div f_1 = r_3$$

$$\therefore f_2 = r_1 \cdot f_1 \text{ and } f_3 = r_2 \cdot f_2$$

Substituting in for f2

$$f_3 = r_2 \cdot (r_1 \cdot f_1)$$

$$f_3 \div f_1 = r_2 \cdot r_1$$

substituting r3 for f3 ÷ f1

$$r_3 = r_2 \cdot r_1 \text{ and } i_3 = i_1 + i_2$$

- ✓ Detta visar att lägga till intervaller är lika med att multiplicera frekvensförhållandena.

10

$$\text{since } r_3 = r_2 \cdot r_1$$

$$\log(r_3) = \log(r_2) + \log(r_1)$$

since $i_3 = i_2 + i_1$ we can show that

$$i_3 = \log(r_3) \text{ and } i_2 = \log(r_2) \text{ and } i_1 = \log(r_1)$$

- ✓ Nu har vi ett definierat värde för i. Det är loggen över förhållandet mellan frekvenserna som omfattar intervallet i fråga. Frekvensförhållandet för varje givet intervall kommer att vara positivt, men det kan vara större än eller mindre än 1. Om värdet på r är större än 1, vet vi att $0 < f_1 < f_2$ och intervallet är stigande (eftersom f_2 är större än f_1). På samma sätt, om $0 < r < 1$, då $0 < f_2 < f_1$ vet vi att intervallet faller. Därför kommer loggen för ett stigande intervall (med $r > 1$) att vara positiv medan loggen för ett fallande intervall (med $r < 1$) kommer att vara negativ.

- ✓ I pianospel innebär att spela DO och RE tillsammans ett stort andra intervall eftersom RE är den andra tonen i skalan
- ✓ Nästa är en liten decima eftersom MI är den tredje tonen i skalan
- ✓ Från DO till FA kallas det det perfekta stora decimat
- ✓ Från DO till SOL som är den femte tonen kallas den perfekta kvinten och så vidare
- ✓ Slutligen kallas en DO och DO som spelas tillsammans en oktav (Se nu <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKug> till 2:08).
- ✓ Nu vet vi hur man bestämmer förhållandet mellan ett intervall bildat från andra förhållanden. Om vi till exempel visste att ett intervall (r_1) hade ett förhållande på $5/4$ (som du kommer att känna igen som en större tredjedel om du kan din övertonsserie) och en annan (r_2) förhållandet $6/5$ (en liten decima) kan vi beräkna förhållandet mellan deras summa. Så en stor decima ($5/4$) plus en liten decima ($6/5$) ger:

$$r_1 \cdot r_2 = r_3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

11

- ✓ Slutligen kallas en DO och DO som spelas tillsammans en oktav (Se nu <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKug> Förhållandet $3/2$ är en perfekt kvint. Alltså bevisade vi matematiskt från ett exempel att en stor decima plus en liten decima ger en perfekt kvint! Här är en snabb uppfriskning av heltonsförhållanden så att du kan prova några andra exempel på egen hand:

$2/1$	Octave
$3/2$	Perfect Fifth
$4/3$	Perfect Fourth
$5/3$	Major Sixth
$5/4$	Major Third
$6/5$	Minor Third

- ✓ Vi har tagit det okvantifierade exemplet för ett intervall, härlett ett verkligt talvärde för det från frekvensförhållandet och använt vår formel för att beräkna kvoten för ett resulterande intervall.

Baserat på: <https://www.notreble.com/buzz/2010/02/18/math-and-music-equations-and-ratios/>

 **UPPGIFT****Använd förhållanden för att uppskatta frekvenser:**

Antag att du har frekvenserna f_0 , f_1 , f_2 and f_3 . Anta att $f_1=5$ Hz, $r_2= 6/5$ och $r_3=3/2$, beräkna f_0

LÄR DIG MER...

Musik i matematiken:

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>

TED TALK: Musik och matematik: Beethoven

<https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY>

Hemsidor:

Math central: <http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html>

Kent State Univeristy: <https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/>

Mathematics and Music: <http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/>

Math and Music Lessons: <https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/>

Böcker:

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. *Arts Education Policy Review*, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). *How Music and Mathematics Relate*. The Great Courses, Virginia. Retrieved from http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher, R.H., Shaw, G.L., Levine, I. J., Wright, E.L., Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning. *Neurological Research*, 19, 2-8.