# PARTE I: Artes Visuais e Matemática

## FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

**Decorações de estrelas coloridas**
(Fonte: Chinh Le Duc - Unsplash)

# UNIDADE 5: ORIGAMI E RELAÇÕES ESPACIAIS

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Erasmus+

TheArtOf Maths

# Guia do Professor

**Título**: Origami e relações espaciais

**Faixa etária**: 13 –15 anos

**Duração:** 2 horas

**Conceitos matemáticos:** dimensões no espaço, simetria, relações geométricas, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, axiomas

**Conceitos artísticos:** Zhezhi, Origami, técnicas de dobragem de papel, livros pop-up

**Objetivos gerais:** descobrir como o origami pode ilustrar conceitos matemáticos e teoremas famosos e adquirir uma visão mais prática do uso da matemática.

**Instruções e metodologias:** os estudantes irão explorar ambos, o Origami e as relações espaciais, como um todo, aplicando técnicas de origami. Esta é a base para descobrir os conceitos mencionados.

**Dicas para o professor:** a metodologia de aprender fazendo é muito eficaz, especialmente com alunos mais novos com dificuldades de aprendizagem. Proporcione uma experiência mais prática, mais agradável e que incentive a criatividade. Explique sempre a utilidade prática de cada conceito matemático. As atividades de origami podem ser feitas em pares, especialmente no caso de alunos com dispraxia por terem maiores dificuldades no manuseamento de materiais.



**Recursos**: esta unidade fornece imagens e vídeos para usar. Os tópicos abordados ajudá-lo-á a encontrar outros materiais para personalizar a aula à sua escolha.

**Objetivos de aprendizagem e competências:** no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Reconhecer os axiomas de Euclides;
- Compreender e aplicar o Teorema de Tales;
- Compreender e aplicar o Teorema de Pitágoras.

**Síntese e avaliação:**

| | |
|---|---|
| Indique 3 aspetos que tenha gostado nesta atividade | 1.<br>2.<br>3. |
| Indique 2 aspetos que tenha aprendido | 1.<br>2. |
| Indique 1 aspeto a melhorar | 1. |

# Introdução

Origami é uma palavra japonesa que se refere à dobragem de papel. Esta técnica está claramente ligada à matemática uma vez que utiliza relações espaciais para criar formas que podem ser alteradas dobrando e desdobrando papel de maneiras específicas.

O conhecimento geométrico pode ser concebido como um instrumento teórico nas artes visuais. Todas as nossas manipulações no espaço tridimensional recorrem ao uso da matemática. Sem sequer pensarmos nisso, estamos a calcular distâncias e a identificar relações espaciais.

Muitos estudiosos enfatizam a mais valia do uso do origami na educação, especialmente para ensinar geografia. As técnicas de dobragem de papel podem ajudar os alunos a entender relações e transformações geométricas, experimentando e analisando as alterações que observam graças a esse método criativo. O valor acrescentado é que possam usar os conceitos aprendidos para criar novas composições artísticas e produzirem um resultado material através das suas operações.

Este módulo dará, portanto, enfoque à aplicabilidade da matemática nas técnicas de dobragem de origamis e incluirá algumas manipulações físicas para que os alunos tenham uma abordagem criativa e prática com a matemática.

# ORIGAMI

Antes de se tornar parte da arte japonesa, a dobragem de papel já havia surgido na China e era chamada Zhezhi. Apenas no século VI é que esta arte foi levada para o Japão por monges Budistas. Em japonês, a palavra "origami" é construída por "ori" que significa "dobra" e "gami" que é papel. Foi usado como um passatempo para as crianças até que um professor de geometria, Akira Yoshizawa, que gostava de origami enquanto criança, decidiu usá-lo para ensinar ângulos, linhas e formas aos seus alunos. Ele desenvolveu as suas novas técnicas e o que costumava ser um passatempo tornou-se uma forma de arte na qual muitos professores de matemática encontraram grandes utilidades.

## Onde é que podemos ver e usar o origami?

O origami pode ser usado para muitos fins. Alguns professores de matemática usam-no para ensinar geometria mas pode-se aplicar o origami noutros contextos! Pode até mesmo observá-lo na natureza!



Sabia que algumas árvores têm folhas que se desdobram de uma forma muito idêntica à técnica de origami chamada **dobra de Miura?** Investigadores do Centro de Biomimética, da Universidade de Reading, descobriram que as folhas de faia e de cárpino se desenrolam de uma forma muito parecida com a técnica de origami.

**Figura 1 – Desenrolamento das folhas de faia**

Dentro do espetro de utilidades do origami, a dobra de Miura é também usada em mapas. Estes são dobrados de uma forma fácil de transportar e desdobrar.

Assista à  sua demonstração através do seguinte GIF:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Miura-ori.gif

Esta técnica é bastante útil quando temos de transportar um pedaço grande de papel ou uma superfície plana. Por este motivo esta técnica é também aplicada no design de painéis solares de forma a ser mais fácil desdobrá-los e aplicá-los no seu destino final.

No seguinte vídeo, da Universidade Brigham Young (EUA), é explicada a importância o origami no design de painéis solares: https://www.youtube.com/watch?v=3E12uju1vgQ

**Livros pop-up**

Provavelmente sabe o que são livros pop-up. Contêm figuras dobradas que se desdobram, quando abertos, e mostram as ilustrações da história. Este tipo de livros usa a dobragem de papel de uma forma muito criativa.

O seguinte GIF demonstra o que é um livro pop-up: https://en.wikipedia.org/wiki/File:PopupCinderella.gif

Assiste ao seguinte vídeo TED-Ed para compreender como criar animações com livros pop-up: https://www.youtube.com/watch?v=RZR_b753ZJ0

# GLOSSÁRIO

**Zhezhi:** a arte de dobrar papel na China.

**Origami:** a arte de dobrar papel no Japão.

**Dobra de Miura:** é a utilização de linhas, formatos, formas e cores que diferem da representação precisa do mundo real na arte visual.

**Livros pop-up:** livros onde os autores recorrem a dobras em papel para criar ilustrações em 3D que se desdobram assim que o leitor abre o livro.

# A Matemática por trás de Origamis

**Os Axiomas:**

O origami pode ser um complementa às regras da geometria que já conhecemos. Por exemplo, os axiomas no livro "Elementos" de Euclides podem ser um bom exemplo para criar outro conjunto de axiomas relacionados à arte da dobragem de papel.

Vejamos o que são os **axiomas de Euclides**:

- Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une;
- Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Todos os ângulos retos são iguais;
- Existindo uma linha e um ponto que não se encontra nessa linha, existe apenas uma linha que passe pelo ponto sem nunca tocar na linha original.

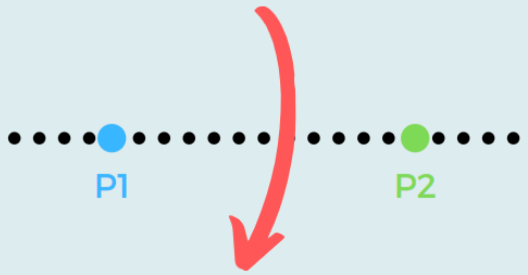


Embora estes axiomas possam ajudar na demonstração de teoremas mais complexos, a geometria dos origamis também podem ser bastante úteis.

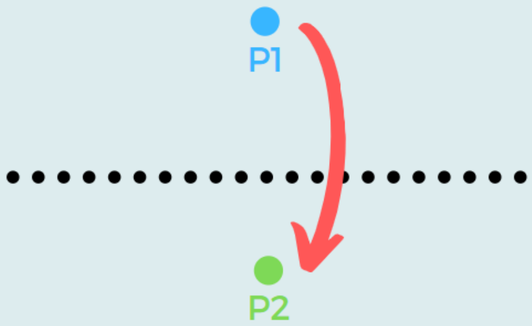
Aqui estão os **axiomas de Huzita–Hatari:**

A **dobra** e o **movimento** estão realçados com cores diferentes em cada imagem.

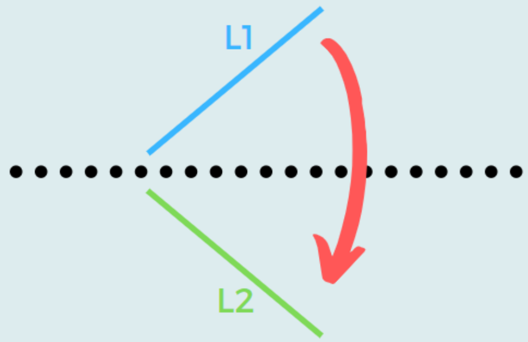
1. Dados dois pontos, P1 e P2, há uma única dobra que passa por P1 e P2.



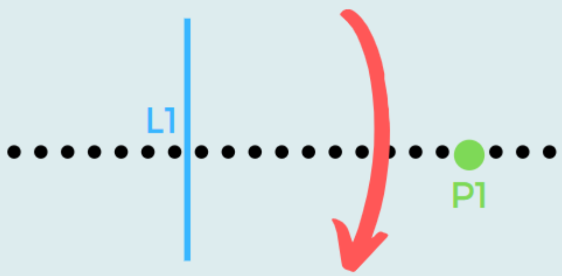
2. Dados dois pontos, P1 e P2, há apenas uma única dobra que sobrepõe P1 e P2.



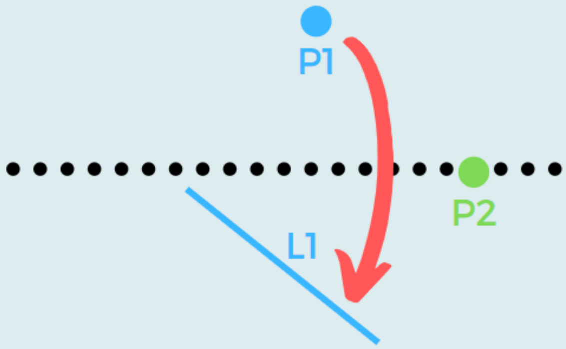

3. Dadas duas retas, L1 e L2, há uma dobra que sobrepõe L1 e L2.



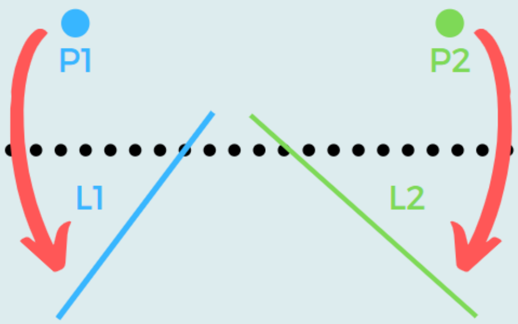

4. Dado um ponto P1 e uma reta L1, há uma única dobra perpendicular a L1 que passa por P1.



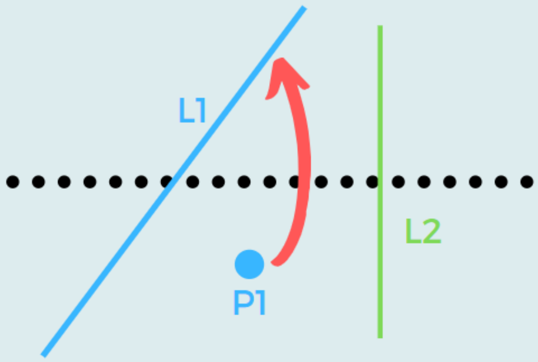
5. Dados dois pontos, P1 e P2, e uma reta, L1, há uma dobra que coloca P1 sobre L1 e que passa por P2.




6. Dados dois pontos, P1 e P2, e duas retas, L1 e L2, há uma dobra que coloca P1 sobre L1 e P2 sobre L2.




7. Dado um ponto, P, e duas linhas, L1 e L2, há uma dobra que é perpendicular a L2 e que coloca P sobre L1.



# Teorema de Tales

Tales era um matemático da Antiga Grécia. O seu teorema é mencionado no livro "Elementos" de Euclides.

Se A, B e C são pontos diferentes num círculo em que a linha AC é o diâmetro, então o ângulo ∠ABC é reto.

Para demonstrar isto, Tales explicou o seguinte:

- Uma vez que OA = OB = OC, OBA e OBC são triângulos isósceles, e pela igualdade dos ângulos base de um triângulo isósceles,
- ∠OBC = ∠OCB e ∠OBA = ∠OAB.

Seja α = ∠BAO e β = ∠OBC.

- Os três ângulos internos do triângulo ABC são α, (α + β), e β.
- Uma vez que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180º:

$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 180°$

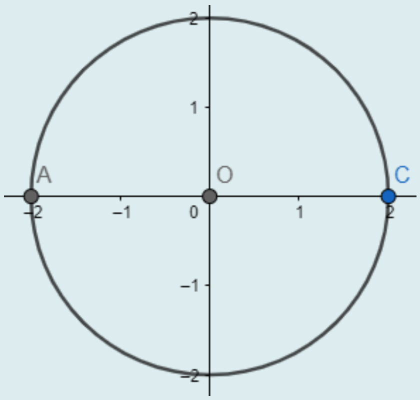
$2(\alpha + \beta) = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

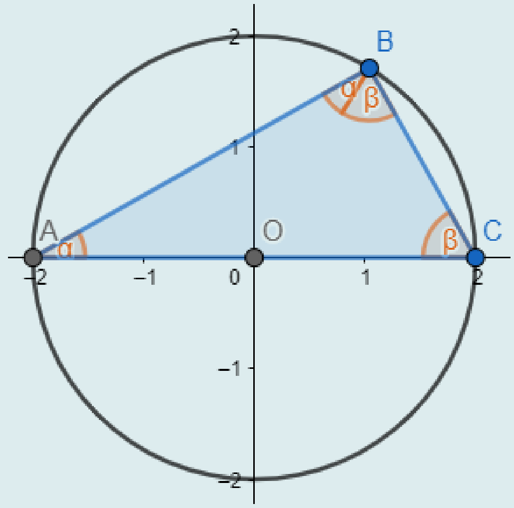
C.Q.D

**Vamos desenhar a prova geométrica do teorema:**

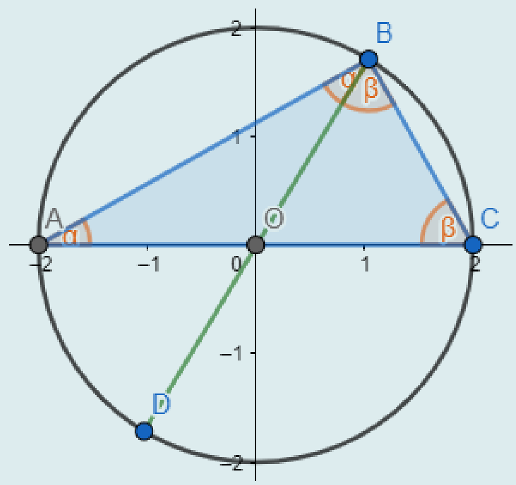
1. **Com uma régua e um compasso, desenhe um círculo numa folha de papel;**



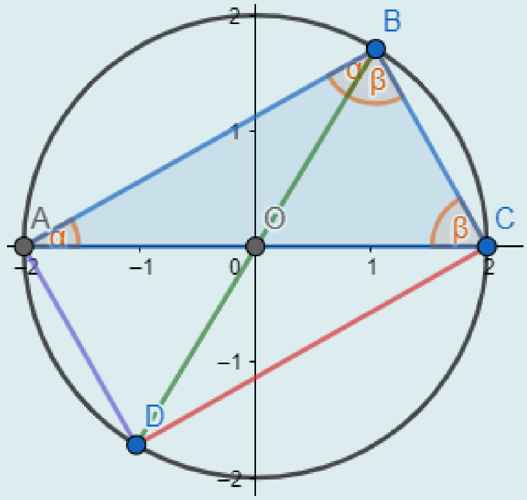
2. Desenhe um triângulo ABC em que o **segmento AC** seja o **diâmetro** do círculo;




3. **A partir do ponto B**, desenhe um **segmento** que passe **pelo centro, O,** e termine numa **intercessão, D,** com o círculo;



**Agora consegue desenhar um paralelograma com todos os pontos (ABCD).**




a) Este paralelograma é um retângulo?

b) Todos os seus ângulos são retos?

c) O que é que isto significa?

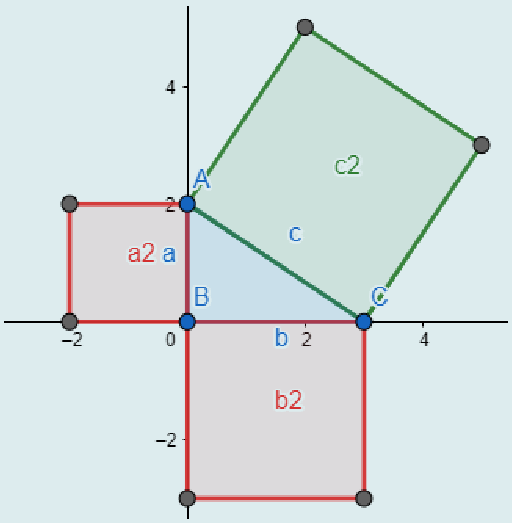
d) Como pensa que se pode usar origami aqui?

# Teorema de Pitágoras

Pitágoras foi, também, um filósofo e matemático da Antiguidade Clássica. O que o tornou mais conhecido foi o seu teorema que afirma o seguinte:

O quadrado da **hipotenusa** (o lado **oposto** ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos catetos.
Assim: $\mathbf{a^2+b^2 = c^2}$

Neste exemplo:




- a = segmento AB
- b = segmento BC
- c = segmento CA

➔ Os quadrados vermelhos representam $a^2$ e $b^2$
➔ O quadrado verde representa $c^2$
➔ O segmento AC é a **hipotenusa**

Façamos alguns exercícios utilizando a fórmula**:**

**Para cada triângulo:**

1. Nomeie os segmentos a,b e c na figura;
2. Aplique a Teorema de Pitágoras;
3. Calcule o comprimento da hipotenusa.

# TAREFA

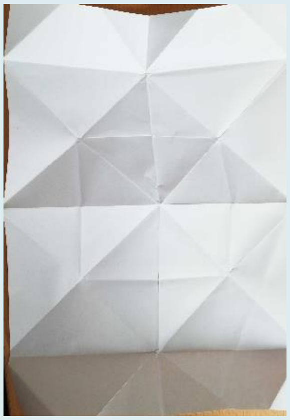
Esta tarefa permitirá a compreensão de modos em como o origami pode representar conceitos e técnicas matemáticas.

**Desenhando o Teorema de Pitágoras com uma técnica de origami: o barco!**

Assista ao seguinte vídeo para a aprender como se faz:
https://www.youtube.com/watch?v=CPrdggN48-c

Agora que tem um barco, desdobre-o e observe as dobras marcadas na folha .

**Deverá observar algo parecido com** o seguinte:



Pode ver que há um padrão de triângulos e quadrados por toda a folha.



Desenhemos o Teorema de Pitágoras sobre o padrão criado.

1. Responda às seguintes questões de forma a comprovar se os axiomas de origami são seguidos:
    a. Há alguma dobra que passe entre os pontos A e E?
    b. Há alguma dobra em que faço o ponto I se sobrepor ao ponto B?
    c. Há alguma dobra que coloque o segmento GB em cima do segmento GF?
    d. Há alguma dobra perpendicular ao segmento AG que passe no ponto C?

2. Destaca essas dobras com uma cor diferente no desenho.

## INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Artigo sobre o uso de origami em contexto escolar:
http://www.fau.edu/education/centersandprograms/mathitudes/documents/20080901bMathitudesOct08revisionFinalVersionforpublicationOct242008.pdf

TED Talk sobre o contributo da matemática na arte do origami:
https://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami#t-193336

Vídeo TED-Ed para saber mais sobre o Teorema de Pitágoras:
https://www.youtube.com/watch?v=YompsDlEdtc

Artigo sobre a matemática no origami:
https://theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing-33968

Artigo sobre a História do origami e axiomas:
https://plus.maths.org/content/power-origami

Vídeo sobre a matemática no origami:
https://www.youtube.com/watch?v=7rGTm6aodHA

Vídeo TED-Ed sobre livros pop-up:
https://www.youtube.com/watch?v=RZR_b753ZJ0

Como fazer um barco em origami (imagens + vídeo):
https://www.youtube.com/watch?v=CPrdggN48-c