

**PARTE V: Literatura e  
Matemática**

**FAIXA ETÁRIA: 16 – 18**

---



**UNIDADE 49: SECÇÕES  
CÓNICAS EM “ALICE NO PAÍS  
DAS MARAVILHAS” DE LEWIS  
CARROL**

---

LogoPsyCom



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

## Guia do Professor

**Título:** Secções Cónicas em “Alice no País das Maravilhas” de Lewis Carrol (1865)

**Faixa Etária:** 16-18 anos

**Duração:** 3 horas

**Conceitos Matemáticos:** geometria Euclidiana e não-Euclidiana, secções cónicas

**Conceitos Artísticos:** análise literária, o romance, metáforas.

**Objetivos Gerais:** descobrir os conceitos matemáticos presentes no livro e aprender a construir argumentos matemáticos aplicados ao dia-a-dia.

**Instruções e Metodologias:** os alunos irão explorar a matemática através da literatura, aplicando-a em contexto real e lendo os excertos. A turma irá descobrir diferentes conceitos matemáticos para aprender sobre secções cónicas.

**Recursos:** esta unidade fornece imagens e vídeos. Os tópicos explorados nestes recursos ajudá-lo-á a encontrar outros materiais para personalizar e dar nuances às suas aulas.

**Dicas para o professor:** aprender fazendo é muito eficiente, especialmente com alunos mais novos e com dificuldades de aprendizagem. Explique sempre a função prática de cada conceito matemático.

**Objetivos de aprendizagem e competências:** no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Compreender as diferenças entre a geometria Euclidiana e a não-Euclidiana;
- Compreender o que são secções cónicas;
- Usar uma equação de segundo grau para desenhar o gráfico de funções.

### Síntese e avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado nesta atividade	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar	1.

## Introdução

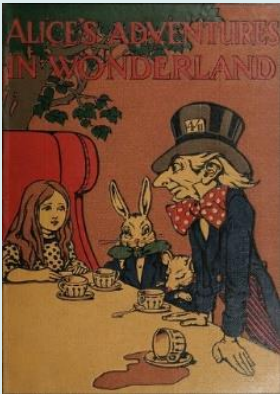
A leitura pode ajudar-nos a compreender o mundo à nossa volta de um modo que não esperávamos. Os livros são, portanto, um recurso de grande valor para os alunos explorarem novos tópicos e conceitos escondidos na história. Alguns dos autores usam a matemática nos seus enredos, todavia e apesar da probabilidade de compreenderem um tópico sobre o qual já leram ser elevada, geralmente os alunos não se focam no mesmo.

A observação das personagens a refletirem sobre problemas e conceitos matemáticos faz com que o leitor queira compreender esses conceitos e resolver esses problemas, da mesma forma que os leitores tentam adivinhar o fim da história. Aqui os alunos irão aprender coisas novas seguindo apenas as aventuras das personagens.

Portanto, ensinar os alunos a matemática que se encontra escondida por detrás de livros famosos pode trazer um grande valor acrescentado à disciplina de matemática, dando aos estudantes uma experiência mais imersiva sobre os possíveis usos da matemática.

# “Alice no País das Maravilhas” por Lewis Carroll

## 1. Sinopse



Este romance, escrito por Lewis Carroll em 1865, conta a história de uma rapariga de sete anos chamada Alice. Alice cai na toca de um coelho e acaba por ir parar ao País das Maravilhas, um local imaginário com pessoas peculiares e animais falantes. Ele vai de lugar em lugar, mudando de formas e de tamanhos, vivendo aventuras inesperadas. Deve estar mais familiarizado com a adaptação feita pela Disney para filme.

## 2. O Contexto

Antes de entrarmos a fundo na história é importante conhecermos o contexto em que este livro foi escrito. O nome do autor da obra era Charles Lutwidge Dodgson (usava o pseudónimo de Lewis Carroll). Tinha sido tutor de matemática no Christ Church College em Oxford e era um matemático muito conservador. Baseou todo o seu conhecimento matemático em elementos de Euclides. Durante o século XIX, a matemática encontrava-se em mudança e teorias novas estavam a surgir. Por exemplo, a álgebra abstrata e os “números imaginários” surgiram nessa altura. De modo a demonstrar o quão absurdas eram estas novas teorias ele utilizava metáforas ao longo de toda a história.

4

## 3. A cena da Lagarta

Nesta cena, Alice tinha mudado de tamanho várias vezes ao comer cogumelos mágicos. Ela encontra uma lagarta que estava a fumar hookah. A palavra “álgebra” advém do árabe “al jabr e al mokabala” o que significa “reunião e redução”. É exatamente isto que a Alice faz quando come os cogumelos na esperança de voltar o seu peso original, acabando, porém, de encolher de 3 metros para 8 centímetros. Esta cena marca o tom das próximas aventuras de Alice, onde esta irá ter de comer exatamente a quantidade certa de cogumelos para manter o seu tamanho e proporções.

## 4. A cena da Pimenta e do Porco

Nesta cena, Alice está na cozinha da Duquesa e todos começam a espirrar devido ao cozinheiro ter adicionado demasiada pimenta à comida. A duquesa entrega o seu bebé à Alice e este lentamente começa-se a transformar num porco. Alice só se apercebe deste facto quando o bebé começa a grunhir em vez de espirrar. Esta cena demonstra-nos o quão absurda é a geometria projetiva, que estuda se as propriedades de uma forma podem manter-se as mesmas quando esta é projetada noutra superfície, desde que mantidas as suas propriedades básicas. O autor aplica uma técnica de Euclides chamada “redução ao absurdo” para dizer que “se uma regra funciona para um triângulo então também funcionaria para um bebé. CQD”. O bebé mantém algumas das suas propriedades básicas, continua rosa e rechonchudo, e é por isso que a Alice só se apercebe da metamorfose quando ele grunhe.

### Excerto:

“a Duquesa sentou-se num banco de três pernas no meio, amamentando um bebé; o cozinheiro estava inclinado sobre o fogo, mexendo um grande caldeirão que aparentava estar cheio de sopa.

- Há certamente muita pimenta nesta sopa! - disse Alice para si mesma, enquanto espirrava. Havia, sem dúvida, demasiada pimenta no ar. Até a Duquesa espirrava, ocasionalmente; o mesmo acontecia com o bebé, que espirrava e uivava, alternadamente, sem um momento de pausa. As únicas coisas que não espirravam na cozinha eram o cozinheiro e o grande gato que se encontrava sentado à lareira, sorrindo de orelha a orelha. [...]

- Por favor, diga-me - disse Alice, um pouco timidamente, pois não tinha muita certeza se eram boas maneiras ela falar primeiro,

- Por é que o seu gato sorri assim?

- É um gato de Cheshire - disse a duquesa - e é por isso. Porco! Ela disse a última palavra com tanta violência repentina que Alice deu um pulo; mas ela apercebeu-se noutro momento que era dirigida ao bebê, e não a ela [...]

E com isto ela voltou a amamentar o seu bebé outra vez, cantando-lhe uma espécie de música de embalar e dando-lhe violentos abanões no fim de cada frase:

- Fala violentamente para o teu pequeno bebé,

E bate-lhe quando ele espirra

Ele apenas faz isso para te chatear

Porque ele sabe que te provoca.

CORO

(Ao qual o cozinheiro e o porco se juntaram):

'Wow! Wow! Wow!' [...]

- Toma! Podes acariciá-lo um bocadinho, se quiseres! - disse a Duquesa a Alice, atirando o bebé para ela enquanto falava.

- Tenho de ir e aprontar-me para jogar croquet com a Rainha - e saiu rapidamente da sala. O cozinheiro atirou-lhe uma frigideira enquanto ela saía, mas não lhe acertou por pouco.

Alice apanhou o bebé com alguma dificuldade, pois este era uma criatura pequena e tinha uma forma estranha, e esticou as pernas e os braços em todas as direções, 'tal como uma estrela do mar' pensou a Alice. Aquela pequena criatura estava a roncar como uma máquina a vapor quando ela a apanhou. O bebé continuava curvando-se e endireitando-se, incessantemente, de modo que, nos primeiros minutos, segurá-lo era o máximo que ela podia fazer. [...]

- Se não levar esta criança comigo -, pensou a Alice, - eles vão matá-lo no espaço de um dia ou dois: não seria assassinato deixá-lo aqui? - Ela disse estas últimas palavras em voz alta e a criaturinha grunhiu em resposta (já tinha deixado de espirrar nesta altura). - Não grunhas - disse Alice; - essa não é a forma correta de te expressares. O bebé grunhiu de novo e Alice olhou, ansiosamente, para a sua cara para ver o que se passava. Não havia espaço para dúvidas ele tinha um nariz *muito* virado para cima, muito mais parecido com um focinho do que com um nariz real; também os olhos estavam a ficar extremamente mais pequenos para um bebé: no geral, Alice não gostou da sua aparência. - Mas talvez estivesse apenas a chorar, - pensou ela, e olhou novamente para os olhos, para ver se existiam lágrimas.



Não, não haviam lágrimas. - Se te transformares num porco, meu caro, - disse Alice , seriamente - eu não terei mais nada a ver contigo. Atenção! - o pobre chorou de novo (ou grunhiu, era impossível dizer o que era), e continuaram ali em silêncio algum tempo."

## 5. A cena da Festa de Chá

A festa de chá na casa do Chapeleiro Maluco tenta demonstrar o absurdo dos trabalhos matemáticos de William Rowan Hamilton. Nestes trabalhos ele experimenta com quaterniões, que é um sistema de números baseados em quatro termos. Os três primeiros termos correspondem às três dimensões e o quarto é uma unidade extra, o conceito de Tempo.

O título deste capítulo "tea-party" (festa de chá) que pode ser lido como "t-party", sendo que "t" é o símbolo matemático para tempo. Os três convidados da festa do chá, o Chapeleiro Maluco, o Arganaz e a Lebre de Março representam os três termos iniciais. O tempo continua a ser o quarto termo, mas o Chapeleiro Maluco diz que teve uma briga com ele e agora o Tempo não faz o que ele lhe pede. Como resultado, todos os três convidados são agora forçados a ficar num plano à volta da mesa até à eternidade. A adivinha do Chapeleiro "Porque é que um corvo é parecido com uma secretária?" não faz sentido nenhum, o que também pode refletir as ideias de Hamilton sobre o tempo puro, em que causa e os efeitos já não se encontram relacionados. O autor usou a sua imaginação para demonstrar o absurdo das novas teorias matemáticas, que criam um mundo sem sentido.

7



Para aprender mais sobre a história do Tempo, pode ver este vídeo TED-Ed:

<https://www.youtube.com/watch?v=R3tbVHlsKhs>.

## Glossário

**Pseudónimo:** um nome fictício usado pelo artista, autor, ect. para assinar os seus trabalhos.

**Euclides (séculos IV – III a.C.):** matemático da Grécia Antiga que estabeleceu as bases da geometria.

**Álgebra Abstrata:** um ramo da álgebra que estuda as estruturas algébricas.

**Números Imaginários:** são números que podem ser escritos como números reais multiplicados pela unidade imaginária  $i$ , da qual sabemos que  $i^2 = -1$ . Por exemplo  $(ai)^2 = -a^2$ . Nesta teoria, o zero é imaginário e real.

**Metáfora:** é uma figura discursiva que nos permite falar de algo implicitamente, falando de uma coisa diferente, mas que mostra semelhanças do que queremos demonstrar.

Exemplo: uma pessoa que pesca por elogios; a pessoa não se encontra literalmente à pesca, porém, podemos usar esta imagem como uma metáfora.

**Hookah:** um cachimbo oriental que tem extraí fumo de um recipiente cheio de água. Também conhecido como shisha ou cachimbo de água.

**Reductio ad absurdum (latim):** significa “redução ao absurdo” e é um argumento usado na lógica para demonstrar que um argumento é ridículo e não pode ser tomado em consideração.

**CQD:** “Como Queremos Demonstrar” – do latim “Quad erat demonstrandum” que significa “como se queria demonstrar”. É normalmente usada no fim de uma demonstração matemática ou filosófica.

**Quaterniões:** é um sistema numérico que estende os números complexos. Uma das suas características é que a multiplicação de dois quaterniões não é comutativa.



# A Matemática por trás de “Alice no País das Maravilhas”

Aprenderemos sobre a geometria Euclidiana e não-Euclidiana, que nos permitirá compreender o que o autor concorda e o que ele considera absurdo.

## Geometria Euclidiana e não-Euclidiana

### 1. Geometria Euclidiana

A geometria Euclidiana é a que mais aprendemos. Euclides era o “pai da geometria” e escreveu as seus postulados, definições e noções comuns no seu conjunto de livros “Elementos”. O seu quinto postulado levou a algumas reflexões entre matemáticos conceituados ao longo da história. Euclides baseou a sua geometria em distâncias e ângulos, o que não ocorrerá nos estudos seguintes sobre geometria.



Veja o seguinte vídeo TED-Ed sobre a geometria Euclidiana e não-Euclidiana:

[https://www.youtube.com/watch?v=LPET\\_HhNOVM](https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhNOVM)

9

### 2. Geometria não-Euclidiana

A geometria projetiva é usada na geometria não-Euclidiana, como é o caso das geometrias elíptica e hiperbólica. Esta geometria foca na projeção de formas noutras superfícies e afirma que **uma forma pode curvar-se ou esticar-se tornando-se numa outra forma se mantiver as suas propriedades básicas**. Parte do pressuposto que o quinto postulado de Euclides está errado.

A curvatura da superfície na qual as formas são projetadas é uma grande parte do que torna as geometrias não-Euclidiana diferentes da geometria Euclidiana. Os matemáticos estudaram as propriedades das formas projetadas para ver se elas permaneciam as mesmas em perspetiva.

Exemplo de duas linhas paralelas:



De acordo com a geometria Euclidiana, duas linhas paralelas nunca deviam encontrar-se, mas quando as olhamos com perspectiva ou projetadas numa outra superfície, essas linhas parecem encontrarem-se no horizonte, em algum ponto no **infinito**. Com o conceito de infinito, estamos a encarar uma geometria que não considera formas, ângulos nem distâncias.

## Secções Cónicas

Quando cortamos um cone com planos em diferentes partes, iremos ter formas diferentes. Observemos a Fig:

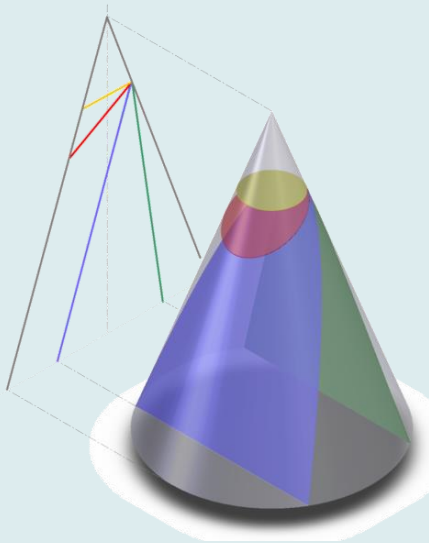


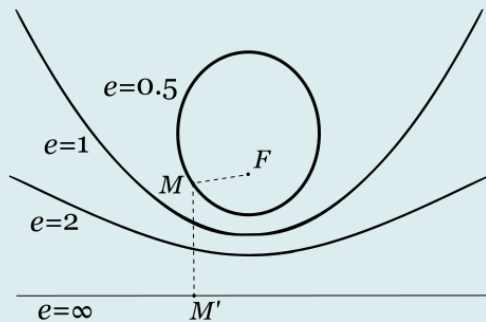
Fig. 1 – Cone e secções cónicas

Como podemos ver, quando cortamos o cone por um plano, obtemos formas diferentes.

- A **amarelo**: cortamos de forma perfeitamente horizontal e obtemos uma **circunferência**.
- A **vermelho**: cortamos com um pequeno ângulo, e obtemos uma **elipse**.
- A **azul**: cortamos o cone na diagonal e paralelamente ao topo do cone e obtemos uma **parábola**.
- A **verde**: cortamos o cone com um ângulo mais vincado e obtemos uma **hipérbole**.

Podemos, também, usar um ponto (foco) e uma linha reta (diretriz) para definir essas curvas:

**Mede a distância:**



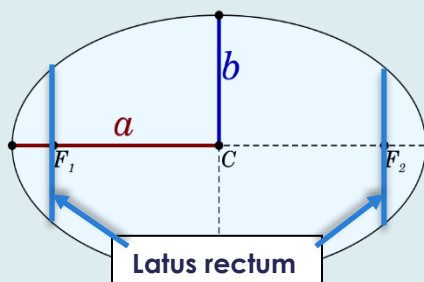
- Do foco (F) até um ponto na curva (M).
- Perpendicularmente desde a diretriz (M') até esse ponto, a razão entre as duas distâncias irá manter-se o mesmo.
- Para um círculo, a **razão = 0**
- Para uma elipse **0 < razão < 1**

- Para uma parábola, a **razão = 1** (mesma distância)
- Para uma hipérbole, a **razão > 1**

Esta razão é chamada de **excentricidade**, o que significa:

"todos os pontos cuja distância do foco é igual à excentricidade multiplicada pela distância até à diretriz"<sup>1</sup>

A **Latus Rectum** é a linha que vai pelo ponto foco e é paralela à diretriz.



- É 4 vezes mais longa que o comprimento do foco em parábolas.
- É o diâmetro dos círculos.
- É  $\frac{2b^2}{a}$  numa elipse onde a e b são **metade do eixo maior (a) e menor (b)**.

<sup>1</sup> <https://www.mathsisfun.com/geometry/conic-sections.html>

Vamos lembrar algumas equações para cada uma destas curvas:

### 1. A Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### 2. O Círculo (onde $a=b$ )

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{e, portanto, } x^2 + y^2 = a^2$$

De notar que um círculo é uma elipse com eixos iguais.

### 3. A Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### 4. A Parábola

$$y^2 = 4ax \quad \text{com } a > 0$$

Podemos encontrar uma fórmula geral para todos eles, pois, mesmo que essas curvas tenham sido cortadas num sólido, elas agora pertencem à geografia de planos e as suas coordenadas cartesianas podem ser encontradas.

No entanto, uma vez que elas são curvas e não têm qualquer linha reta, não podemos usar só  $x$  e  $y$  na equação.

Iremos, portanto, necessitar de:

- $x$  e  $y$
- $x^2$  e  $y^2$
- $xy$
- um termo constante
- um fator para cada

Gráficos de equações de segundo grau em duas variáveis representam sempre uma secção cónica.

Aqui está a equação geral.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

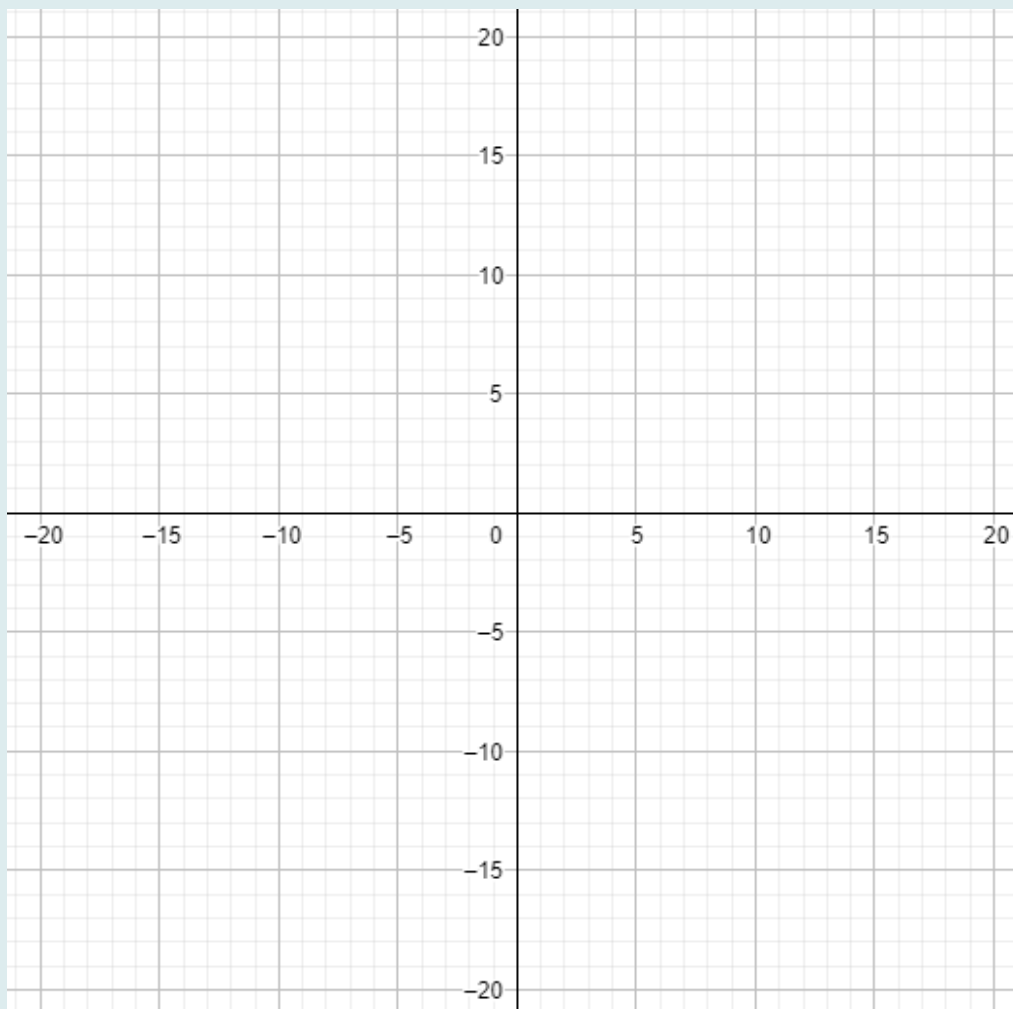
Lembre que todos os coeficientes desta equação precisam de ser números reais e que A, B e C não podem ser todos 0.



vamos fazer alguns exercícios para experimentar estas fórmulas:

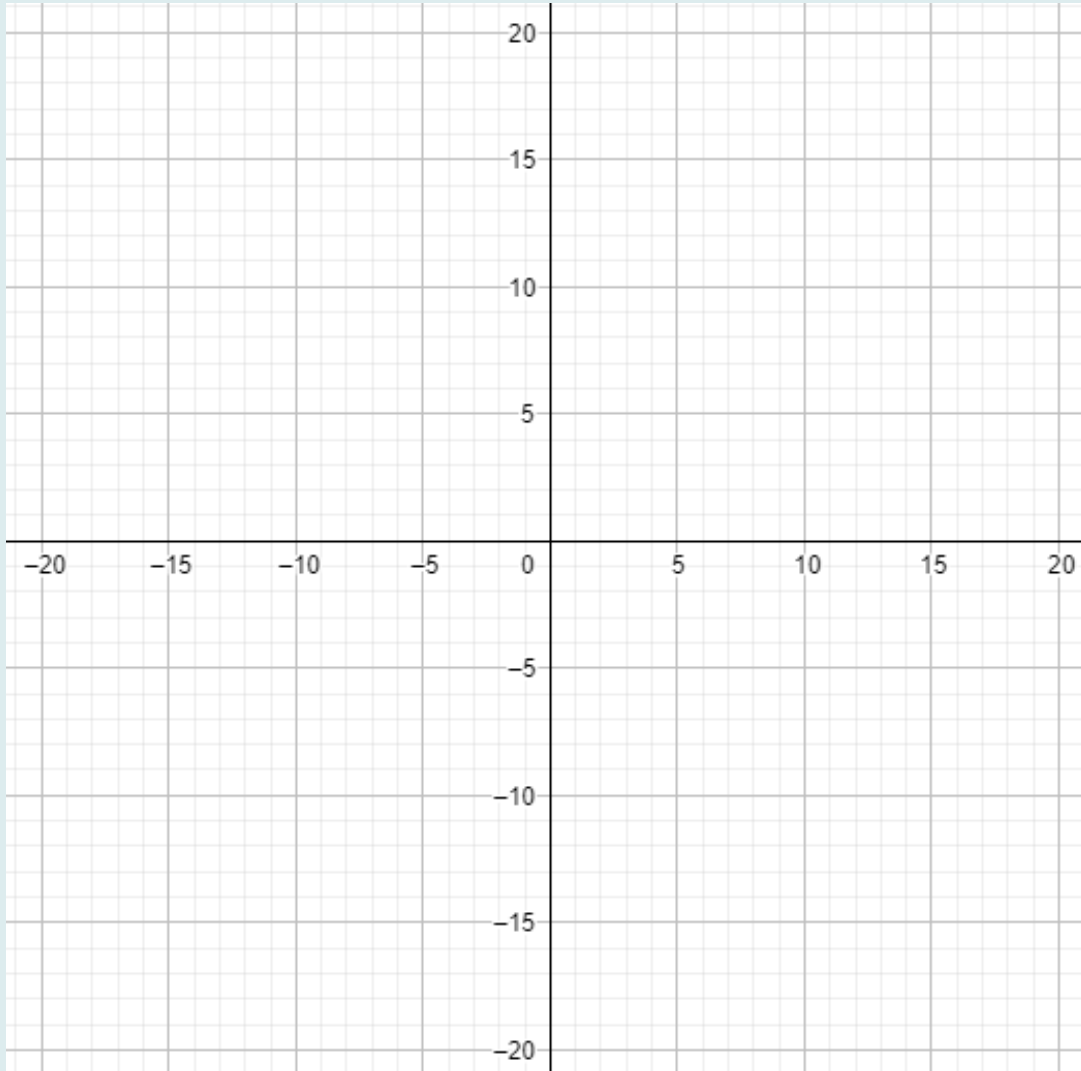
1. Encontre a equação da parábola que tem o vértice em  $(0, 0)$  e o seu foco em  $(-5, 0)$ .

2. Desenhe a equação no seguinte referencial:



3. Encontre o centro e o raio do círculo:  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$ .

4. Desenhe o círculo no seguinte referencial:





## TAREFA

### Sorri como o gato Cheshire

No País das maravilhas, a Alice conheceu um gato estranho que vagorosamente desaparecia, deixando apenas o seu sorriso. Não o faz pensar na forma que acabou de aprender?



Fig. 2 – Gato Cheshire

Na imagem da esquerda da figura Fig. 2, podemos ver, claramente, a cabeça mas, aparenta não ter corpo. Imagem da direita podemos vê-lo desaparecer por entre a folhagem das árvores. A sua cara e o seu sorriso continuam visíveis e o seu queixo parece estar a descansar num dos ramos da árvore.

15

1. **Desenhe a diretriz, foco e curva que consegue ver na segunda imagem (Fig. 1):**



Fig. 1 – Gato Cheshire



## 2. Responda às seguintes questões:

a) Que curva encontrou?

---

b) Porque é que acha que o autor deu a habilidade ao gato de aparecer e desaparecer quando quisesse?

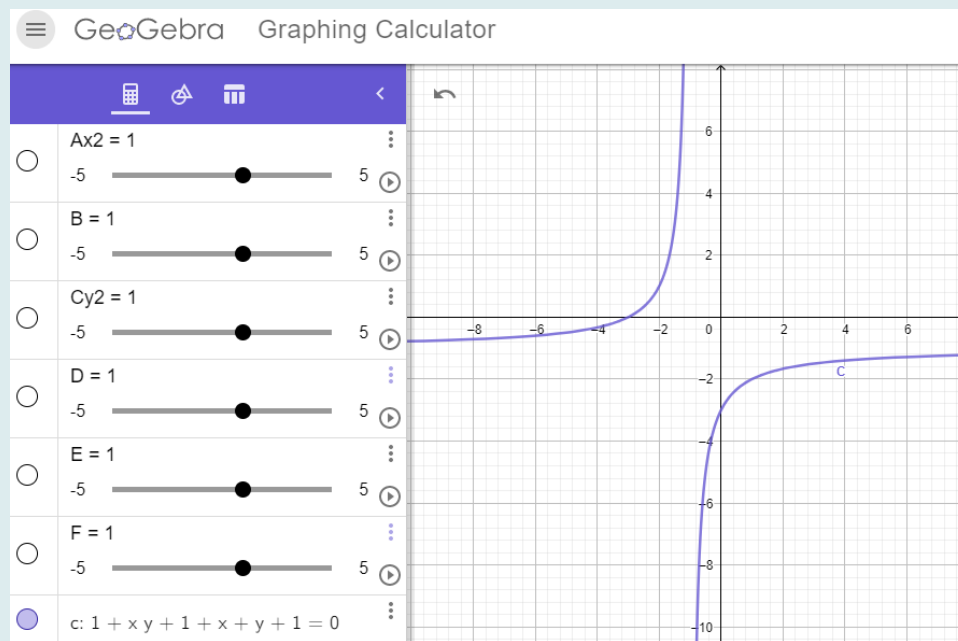
---



---

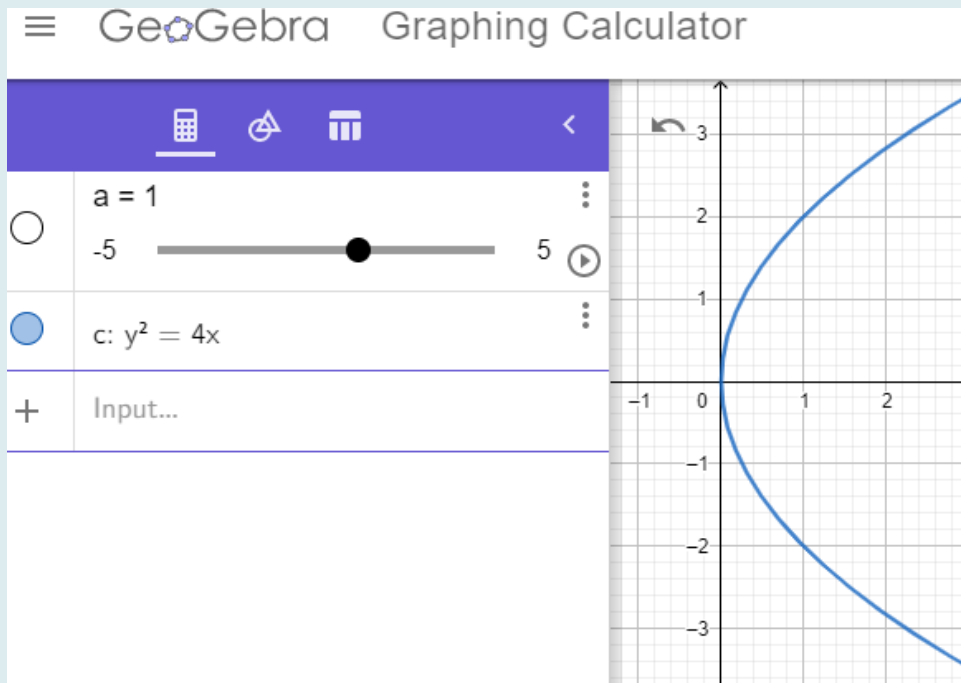
## 3. Use a ferramenta Geogebra para desenhar formas mais facilmente:

Se escrevermos a equação geral obteremos o seguinte:

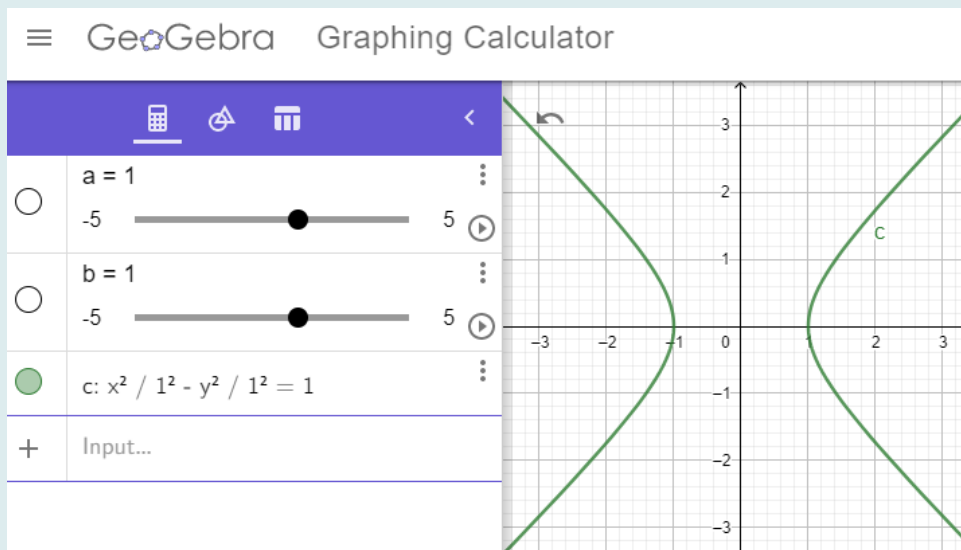


Tente clicar no botão “play” para ver o que acontece 😊

Vamos escrever a fórmula para desenhar a parábola no programa:



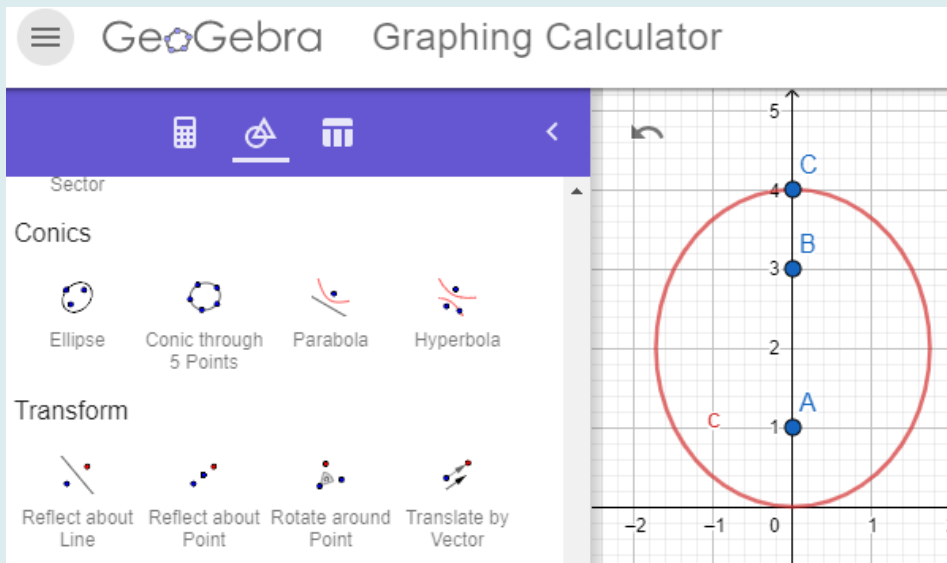
Agora vamos tentar a hipérbole:



Também pode criar as suas próprias formas e obter as suas coordenadas e equações:

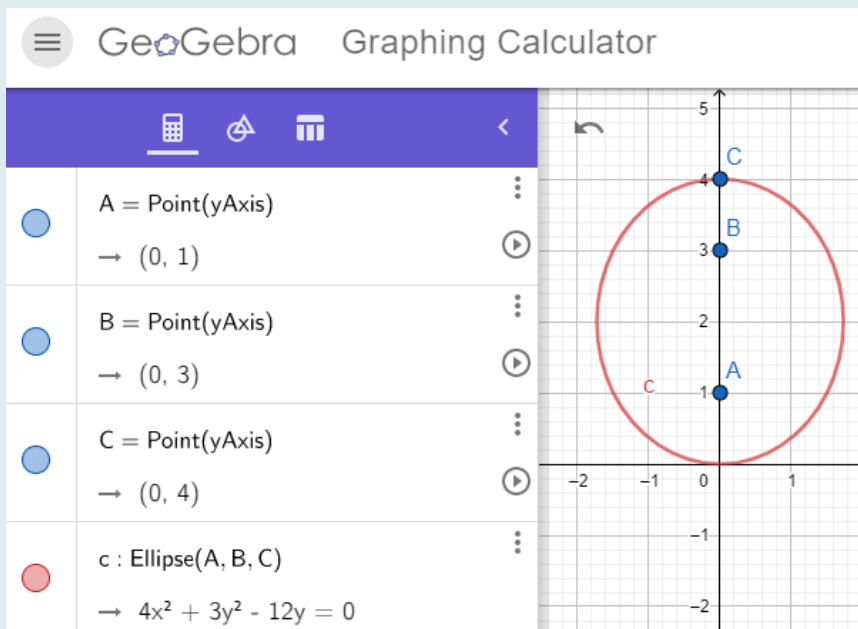
- Para a elipse:

Esta ferramenta permite desenhar uma elipse onde quiser no gráfico:

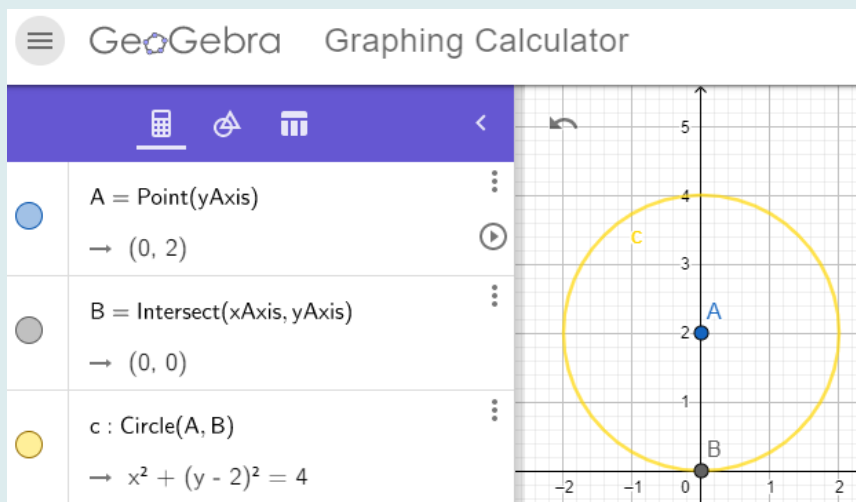
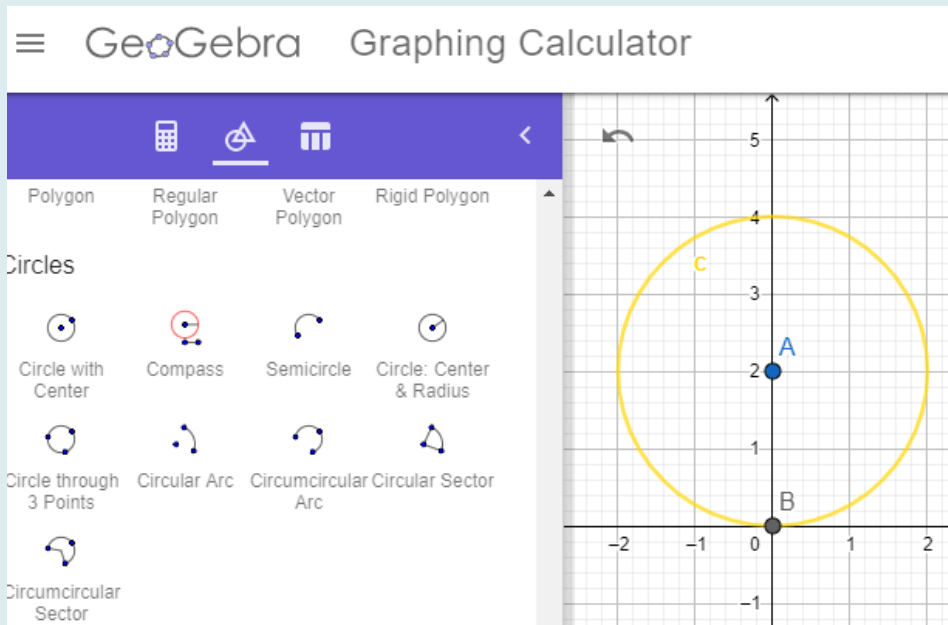


18

Nesta parte, poderá ver as coordenadas e as equações da elipse produzida:



- Para o círculo:



Quando clicar no botão “play”, irá ver que as formas podem dobrar, esticar e encolher tornando-se outras figuras.



Foi assim que vários matemáticos chegaram à conclusão que as formas podem-se dobrar e esticar, tornando-se noutras formas se mantiverem as mesmas propriedades básicas. Tal como aconteceu ao bebé da Duquesa que se transformou num porco!

## INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS:

A Matemática em Alice no País das Maravilhas:

<https://www.publico.pt/2016/03/21/ciencia/noticia/alice-no-pais-das-maravilhas-matematicas-1726556>

Álgebra em Alice no país das Maravilhas:

<https://expresso.pt/opiniao/NunoCrato/do-outro-lado-do-espelho=f568293>

A matemática escondida em Alice no País das Maravilhas:

<https://expresso.pt/opiniao/NunoCrato/as-desventuras-de-alice=f567050>

Geometria projetiva:

<https://cmup.fc.up.pt/evmat/2016/sites/default/files/geometria-projetiva-EVMAT2016v3.pdf>

Postulados de Euclides nos Elementos:

[https://www.youtube.com/watch?v=LPET\\_HhN0VM](https://www.youtube.com/watch?v=LPET_HhN0VM)

História da geometria não-Euclidiana – parte 1:

<https://www.youtube.com/watch?v=nkvVR-sKJT8>

História da geometria não-Euclidiana – parte 2:

<https://www.youtube.com/watch?v=vUWKMo5scKY>

História da geometria não-Euclidiana – parte 3:

<https://www.youtube.com/watch?v=H74AayZkpXg>