**Falcon 9 SES-8**
(Fonte: SpaceX DE Wikicommons (2013)

# PARTE IV: Cinematografia e Matemática

## FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

# UNIDADE 43: FUNÇÃO QUADRÁTICA NO FILME "O CÉU DE OUTUBRO"

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOf Maths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Erasmus+

# Guia do Professor

**Título**: Função Quadrática no filme "O Céu de Outubro"

**Faixa Etária**: 15 – 18 anos

**Duração:** 2 horas

**Conceitos Matemáticos:** função quadrática

**Conceitos Artísticos:** queda livre, queda vertical

**Objetivos Gerais:** perceber a noção de função quadrática, calcular as coordenadas do seu vértice, resolver equações e inequações quadráticas. Calcular a posição de um projétil quando em queda livre ou lançado verticalmente.

**Instruções e Metodologias:** será útil utilizar uma calculadora gráfica (pode ser a calculadora gráfica online Desmos) para mostrar os gráficos aos alunos e para verificarem soluções das equações/inequações quadráticas.

**Recursos**: computador com ligação à internet; Acesso ao website: https://www.desmos.com/

**Dicas para o professor:** começar por obter os gráficos de algumas funções quadráticas para explicar as suas propriedades. Dar um exemplo para cada um dos conceitos lecionados e depois deixar os alunos praticarem exercícios semelhantes.



**Resultados de aprendizagem e competências:** No final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Imaginar o aspeto do gráfico de uma função quadrática e obter o mesmo;
- Calcular o máximo ou mínimo de uma função quadrática;
- Resolver equações e inequações quadráticas;
- Calcular a posição de um projétil quando em queda livre ou lançado verticalmente.

**Síntese e Avaliação:**

| | |
|---|---|
| Indique 3 aspetos que gostpu desta atividade | 1.<br>2.<br>3. |
| Indique 2 aspetos que tenha aprendido | 1.<br>2. |
| Indique 1 aspeto a melhorar | 1. |

## Introdução

Por vezes encontram-se aspetos relacionados com a Matemática em séries televisivas ou filmes. Em alguns casos, não é dada muita importância a estes aspetos da Matemática pelo facto de não influenciarem a história em si. Contudo, existem alguns casos em que tal se verifica.

Alguns exemplos incluem: “21” (EUA, 2008), de Robert Luketic; “A Prova” (EUA, 2005), de John Madden; “Uma Mente Brilhante” (EUA, 2001), de Ron Howard; “Enigma” (EUA, 2001), de Michael Apted; “Pi” (EUA, 1998) de Darren Aronofsky; “O Bom Rebelde” (USA, 1997), de Gus Van Sant e “Cubo” (Canadá, 1997), de Vincenzo Natali.

Nesta unidade, o filme "O Céu de Outubro”” (EUA, 1999), de Bennet Miller, será alvo de estudo e serão analisados os conceitos matemáticos nele abordados tais como a trajetórias de projéteis e a função quadrática.

# O Céu de Outubro

O Céu de Outubro ("October Sky" em inglês)  foi lançado em 1999, é um drama biográfico, baseado no livro de Homer Hickman "Rocket Boys". Tanto o livro como o filme são fundados na história verídica de Homer Hickam, filho de um mineiro, que, contra a vontade do seu pai, foi inspirado a enviar foguetes feitos em casa pelo primeiro envio do Sputnik 1 em outubro de 1957 pela União Soviética.


**Fig. 1 – Cartaz promotional do filme O Céu de Outubro (1999)**

(Fonte:https://play.google.com/store/movies/details/O_C%C3%A9u_de_Outubro?id=UEOza5ySnDY&hl=pt)

Desde a queda livre até ao lançamento vertical de foguetes, Homer e o seu amigo Quentin usam conceitos de forma a comprovar a sua inocência relativamente a um fogo que começou perto da zona onde um dos foguetes que lançou aterrou. Para fazer isto, eles baseiam-se em funções quadráticas de forma a demonstrar a impossibilidade de um projétil cair naquela localização.

Eventualmente, Homer Hickman, foi contratado como engenheiro espacial pela NASA.

## Glossário

**Lançamento vertical:** Lançamento de um corpo para cima ou para baixo, o qual, ao contrário da queda livre, apresenta velocidade inicial.

**Projétil**: qualquer objeto que movimento sob a influência da gravidade.

**Queda livre:** É o abandono de um corpo, a partir do repouso, no vácuo desconsiderando-se a ação da resistência do ar.

**Sputnik 1:** O Sputnik 1 foi o primeiro satélite artificial da Terra. Foi lançado pela União Soviética em 4 de outubro de 1957 na Unidade de teste de foguetes da União Soviética atualmente conhecido como Cosmódromo de Baikonur.

# A Matemática por trás de “O Céu de Outubro”

Tal como o Homer e os seus amigos calcularam em que área é que o projétil que lançaram aterrou. Também é possível calcular o peso de um objeto que se encontra em queda livre ou que foi atirado, como uma função de tempo. De forma a fazer tal é usada a seguinte função algébrica:

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0}$$

**Onde:**

**h(t)** → peso (em metros)

**t** → tempo (em segundos)

**$v_0$** → velocidade inicial (em m/s)

**$h_0$** → peso inicial (em metros)

**g** → aceleração gravitacional em **$m/s^2$**

Portanto:

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{h(t) = \pm\frac{1}{2}(9,8)t^2 + v_0t + h_0} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{h(t) = \pm 4,9t^2 + v_0t + h_0}$$

Vimos anteriormente que a função algébrica que nos permite calcular a altura, em metros, de um objeto em queda livre ou lançado verticalmente, em função do tempo, $\mathbf{h(t) = \pm 4,9t^2 + v_0t + h_0}$, é uma **função quadrática**, cujo gráfico é uma parábola.

Vamos debruçar-nos um pouco sobre as funções quadráticas a fim de ficarmos a conhecer algumas das suas propriedades.

# Função quadrática

## Definição e elementos característicos

Uma **função quadrática**, ou função polinomial do 2.º grau, é uma função $\boldsymbol{f}$ definida por:

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}, \qquad a \neq 0$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são números reais.

O domínio de uma função quadrática é o conjunto dos números reais.

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada **parábola**.

**Exemplos:**

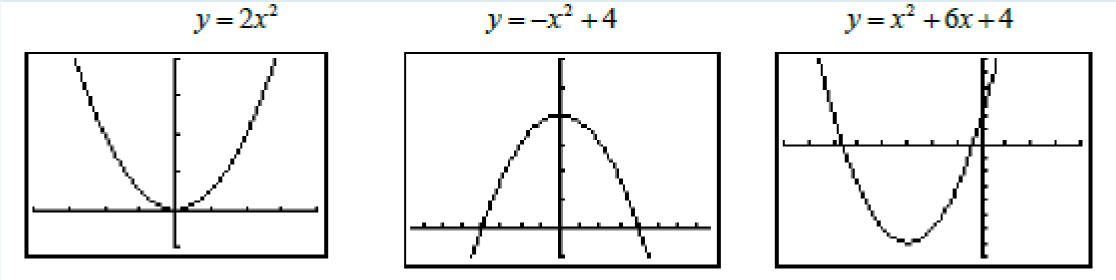


**Fig. 1 – Funções Quadráticas**
(Fonte: https://www.desmos.com/)

- O valor do parâmetro $\mathbf{a}$ tem influência no aspeto do gráfico:
  - se $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;
  - se $\mathbf{a} < \mathbf{0}$, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**.

Uma parábola (Fig. 2) tem características particulares:

- Uma parábola é simétrica relativamente a uma reta vertical que se designa por **eixo de simetria**.
- O eixo de simetria de uma parábola é a reta de equação $\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}$.
- O ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria designa-se por **vértice**.
- As coordenadas do vértice de uma parábola são dadas pelas expressões

$$\mathbf{x_V} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}} \text{ e } \mathbf{y_V} = \mathbf{f(x_V)} = \mathbf{f}\left(-\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right) \text{ ou } \mathbf{y_V} = \frac{\mathbf{4ac-b^2}}{\mathbf{4a}}.$$

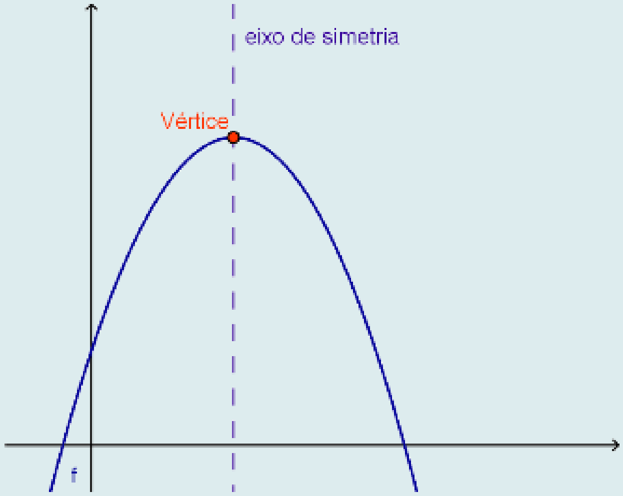


**Fig. 2 - Eixo de simetria** (Fonte: http://magiasdamatematica.blogspot.com/2014/05/parabolas-na-natureza.html)



## Zeros de uma função quadrática

Chama-se **zeros** ou **raízes** da função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ aos números reais $x$ tais que $f(x) = 0$.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ são as soluções da equação do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada **fórmula resolvente**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Exemplo:**

Determinam-se os zeros da função definida por $\mathbf{f(x) = x^2 - 6x + 5}$

- Identificam-se os valores a = 1, b = - 6 e c = 5
- Aplica-se a fórmula resolvente:

$$\mathbf{f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6-4}{2} \lor x = \frac{6+4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \lor x = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x = 1 \lor x = 5}$$

Zeros = {1, 5}

**Nota:**

1. A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando Δ= $\mathbf{b^2 - 4ac}$ , chamado binómio discriminante, a saber:

- quando Δ> $\mathbf{0}$, **há duas raízes** reais e distintas;
- quando Δ= $\mathbf{0}$, há **só uma raiz** real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ< $\mathbf{0}$, **não há raiz** real.



2. Algumas equações do 2.º grau podem resolver-se sem recorrer à fórmula resolvente. Isto acontece, por exemplo, quando as equações do 2.º grau são incompletas, ou seja, do tipo:

- $\mathbf{ax^2 + c = 0}$;
- $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$.

# Interseção do gráfico de uma função quadrática com os eixos coordenadas

## Interseção do gráfico com o eixo $\mathbf{Oy}$

Para obter as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função $\mathbf{f}$ definida por $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$; $\mathbf{a, b, c} \in \mathbb{R}$ $\mathbf{e}$ $\mathbf{a \neq 0}$ com o eixo Oy , substitui-se $\mathbf{x}$ por 0. Como $\mathbf{f(0) = c}$, existe sempre um ponto de interseção do gráfico da função quadrática com o eixo das ordenadas. As coordenadas do ponto de interseção são $(\mathbf{0, c})$.

## Interseção do gráfico com o eixo $0x$ (zeros função)

Uma função quadrática pode ter nenhum, um ou dois zeros.

Observemos as seguintes representações gráficas de funções quadráticas.

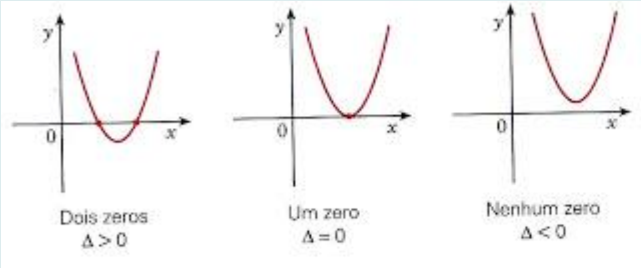


**Fig. 3 - Representações gráficas de funções quadráticas**
(Fonte: http://funcaode2grau.blogspot.com/2008/02/resumo-terico-da-funo-quadrtica.html)

As abcissas dos pontos de ordenada zero, são os zeros da função.

No caso da função quadrática, o conhecimento dos zeros tem interesse quer para a resolução de equações e inequações do 2.º grau, quer para a resolução de problemas em contexto real.



## Sinal de uma função quadrática

- **Se a função tem 2 zeros** $(\Delta > 0)$

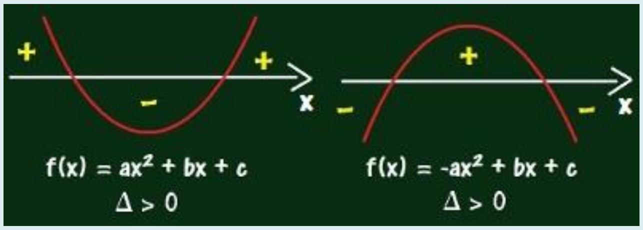

**Fig. 2 – Sinal de uma função quadrática com 2 zeros**
(Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html)

Positiva: $]-\infty; \mathbf{x_1}[\ \cup\ ]\mathbf{x_2}; +\infty[$ Positiva: $]\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}[$

Negativa: $]\mathbf{x_1}; \mathbf{x_2}[$ Negativa: $]-\infty; \mathbf{x_1}[\ \cup\ ]\mathbf{x_2}; +\infty[$

- **Se a função tem 1 zero (duplo)** $(\Delta = 0)$

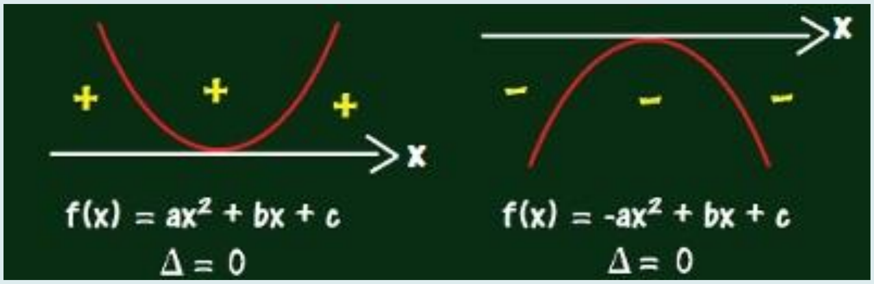


**Figura 3: Sinal de uma função com um zero**
Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html

Positiva: $\mathbb{R}\backslash\{\mathbf{x_1}\}$ $\mathbf{ou}$ $]-\infty; \mathbf{x_1}[\cup]\mathbf{x_1}; +\infty[$ Positiva: $\{\ \}$ $\mathbf{ou}$ $\emptyset$

Negativa: $\{\ \}$ $\mathbf{ou}$ $\emptyset$ Negativa: $\mathbb{R}\backslash\{\mathbf{x_1}\}$ $\mathbf{ou}$ $]-\infty; \mathbf{x_1}[\cup]\mathbf{x_1}; +\infty[$

- **Se a função não tem zeros** $(\Delta < 0)$

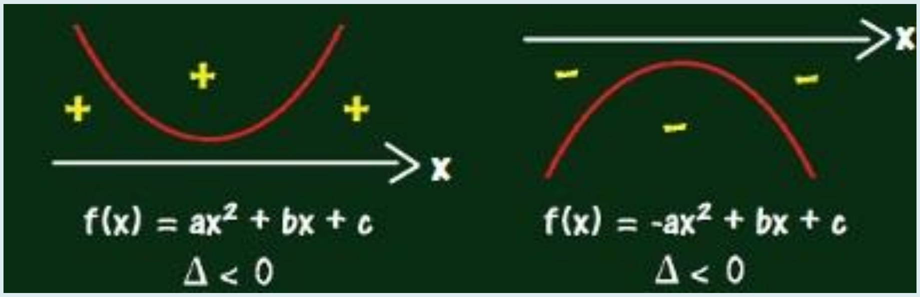


**Fig. 4 – Sinal de uma função sem zeros**
Fonte: https://alunosonline.uol.com.br/matematica/estudo-variacao-sinal-uma-funcao-2-grau.html

Positiva: $\mathbb{R}$ Positiva: $\{\ \}$ $\mathbf{ou}$ $\emptyset$

Negativa: $\{\ \}$ $\mathbf{ou}$ $\emptyset$ Negativa: $\mathbb{R}$

## Inequações do 2.º grau

Se na forma canónica de uma equação do 2.º grau, $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, em que $\mathbf{a \neq 0}$, se substituir o sinal de igualdade por um sinal de desigualdade passa-se a ter uma **inequação do 2.º grau.**

Resolver uma inequação do 2.º grau consiste em determinar os valores de x para os quais a função $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ é positiva, negativa, não positiva ou não negativa.

Exemplo: Resolva a inequação $\mathbf{x^2 + 2x > 3}$

Resolução:

1.º passo: $\mathbf{x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0}$

2.º passo: Resolvemos agora a equação $\mathbf{x^2 + 2x - 3 = 0}$

$$\mathbf{x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 - 4}{2} \lor x = \frac{-2 + 4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6}{2} \lor x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = -3 \lor x = 1}$$

3.º passo: Fazemos um esboço do gráfico de $\mathbf{f(x) = x^2 + 2x - 3}$ e assinalam-se os zeros e as zonas onde a função é negativa e onde é positiva.

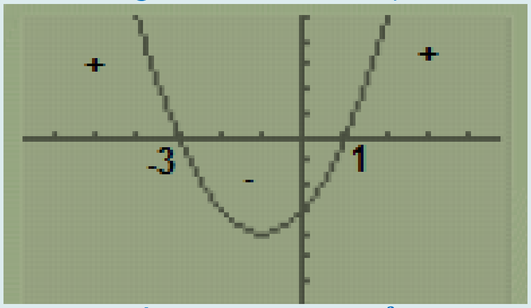


**Fig. 5 – Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x - 3$**
(Fonte: Calculadora Gráfica)

4.º passo: Escrevemos o conjunto solução da inequação

$$\mathbf{x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -3\right[ \cup \left]1; +\infty\right[}$$

Nota: Podemos também resolver a inequação anterior com recurso à calculadora gráfica online Desmos:

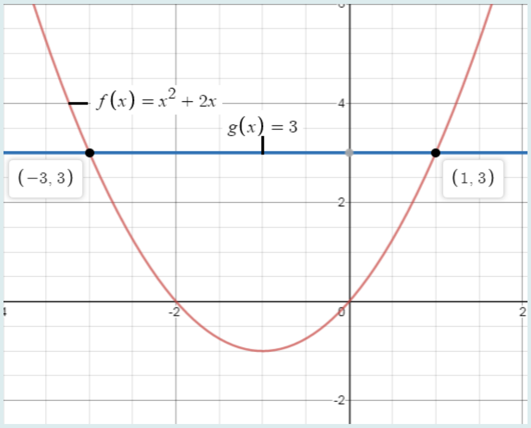


**Fig. 8 – Gráfico da inequação $x^2 + 2x > 3$**
(Fonte: https://www.desmos.com/calculator)

Sendo que neste caso o conjunto solução corresponde à parte do gráfico da função quadrática que está acima da reta de equação $\mathbf{x = 3}$, ou seja,

$$\mathbf{C.S.} = \left]-\infty; -\mathbf{3}\right[ \cup \left]\mathbf{1}; +\infty\right[$$

### A função quadrática escrita na forma y = a(x – h)² + k

Qualquer função quadrática pode ser escrita na forma $\mathbf{y = a(x-h)^2 + k}$, em que $\mathbf{(h, k)}$ são as coordenadas do seu vértice, bastando para isso conhecer as coordenadas do seu vértice e de mais um ponto.

## A função quadrática no lançamento de projéteis

Existe uma função algébrica que nos permite calcular a altura, em metros, de um objeto em queda livre ou lançado verticalmente, em função do tempo:

$$\mathbf{h(t) = \pm 4{,}9t^2 + v_0 t + h_0}$$

$\mathbf{h(t)}$ -> altura (em metros)

$\mathbf{t}$ -> tempo (em segundos)

$\mathbf{v_0}$ -> velocidade inicial (em $\mathbf{m/s}$)

$\mathbf{h_0}$ -> altura inicial (em metros)

Nota: caso se considere a constante de gravitação universal, $\mathbf{g}$, igual $\mathbf{10\ m/s^2}$ para facilitar os cálculos, então a fórmula passa a ter o seguinte aspeto:

$$\mathbf{h(t) = \pm 5t^2 + v_0 t + h_0}$$

Observação: No caso da queda livre, bem como no caso do lançamento vertical ser efetuado de cima para baixo, usamos + na fórmula e no caso do lançamento ser efetuado verticalmente, de baixo para cima, usamos o -, isto porque para o lançamento para baixo a aceleração é positiva e no lançamento para cima a aceleração é negativa.

Exemplos:

1) Um projétil é largado a 80m do solo. Sendo $\mathrm{g} = 10\mathrm{m/s^2}$ e o projétil estando livre de forças dissipativas, determine o instante em que o móvel atinge o solo.

Resolução:

1.º passo: Escrever a fórmula que nos dá a altura a que se encontra o projétil.

Sabemos que a altura inicial é $\mathbf{h_0 = 80\ m}$. Como a velocidade inicial é $\mathbf{v_0 = 0\ m/s}$ e como o projétil está a descer, então a fórmula é

$$\mathbf{h(t) = 5t^2 + 0 \times t + 80 = 5t^2 + 80}$$

2.º passo: Resolver a equação $\mathbf{h(t) = 0}$

$$\mathbf{h(t) = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 80 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 = 80 \Leftrightarrow t^2 = \frac{80}{5} \Leftrightarrow t^2 = 16}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow t = \pm 4 \Leftrightarrow t = 4\ s.}$$

3.º passo: Resposta: O projétil atinge o solo ao fim de 4 segundos.



2) Um projétil é atirado verticalmente para cima a partir do solo, com velocidade de 72 km/h. Determine:

a) a função que nos dá a altura do projétil;

c) a altura máxima atingida;

d) a altura para t = 3 s, e o sentido do movimento nesse instante;

e) o instante em que o móvel atinge o solo.

Obs.: Adote $\mathrm{g} = 10\ \mathrm{m/s^2}$

Resolução:

a) Convertendo 72 km/h em m/s obtemos 20 m/s, isto é $v_0 = 0\ \mathrm{m/s}$. Sabemos também que a altura inicial é $h_0 = 0\ \mathrm{m}$ e como o projétil começa a subir, então a fórmula é $h(t) = -5t^2 + 20 \times t + 0 = -5t^2 + 20t$.

b) A altura máxima é atingida no vértice da parábola. Calculemos as coordenadas do seu vértice: $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2\times(-5)} = 2$ (a altura máxima é atingida ao fim de 2 s) e a altura máxima é igual a $h(2) = -5 \times 2^2 + 20 \times 2 = 20$ m.

c) $h(3) = -5 \times 3^2 + 20 \times 3 = 15$ m. Até 2 s o movimento é direcionado para cima (altura máxima) e para $t > 2\mathrm{s}$ o movimento é direcionado para baixo, logo aos 3 segundos o sentido é descente.

d) O tempo de descida é igual ao tempo de subida, portanto o móvel irá atingir o solo novamente depois de 2 + 2 = 4 s. Também poderíamos chegar a este valor resolvendo a equação $h(t) = 0$.

# TAREFAS

## TAREFA 1

Uma bala está colocada 1,5 m acima do solo e é lançada segundo um determinado ângulo com o nível do solo.

A trajetória da bala é dada pela função definida por: $\mathbf{f(x) = -0,0025x^2 + x + 1,5}$ onde $\mathbf{f(x)}$ é a altura da bala (em metros) e $\mathbf{x}$ a distância horizontal da bala ao ponto de lançamento.

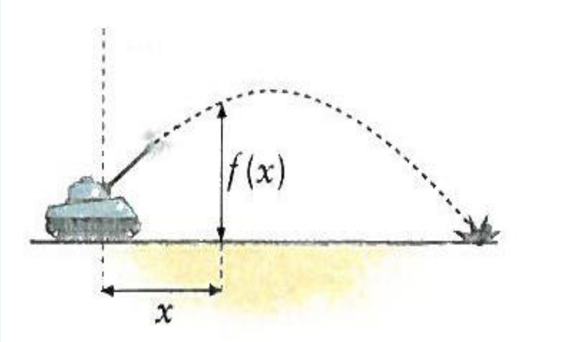


**Fig 9 - Trajetória de uma bala**
(Fonte: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A2 – Ensino Profissional: Funções polinomiais. Porto: Porto Editora.))

1.1. Determine a distância, na horizontal, em metros e com uma casa decimal, entre o ponto de lançamento e o ponto onde caiu a bala.

1.2. Determine a altura máxima atingida pela bala e a que distância, na horizontal, em que foi atingida.

## TAREFA 2

Resolve, analiticamente, a seguinte inequação $2x^2 - 8x > -6$.

## TAREFA 3

Uma bola é lançada na vertical de baixo para cima.

A altura $h$, em metros, a que se encontra a bola $t$ segundos após o lançamento é dada por: $h(t) = 1 + 38t - 5t^2$.

3.1. Determine $h(0)$ e interprete o resultado no contexto da situação apresentada.

3.2. Determine a altura máxima atingida pela bola e o instante em que ocorreu.

3.3. Em que instante a bola atingiu o solo? Apresente o resultado com uma casa decimal.

3.4. Em que intervalos de tempo a bola esteve a menos de 30 metros do solo? Apresente a resposta com aproximação às décimas do segundo.

# INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Enredo do filme Céu de Outubro (1999)

https://www.imdb.com/title/tt0132477/?ref_=nv_sr_1?ref_=nv_sr_1

https://pt.wikipedia.org/wiki/October_Sky

Lançamento de projéteis

https://pt.khanacademy.org/science/physics/one-dimensional-motion/old-projectile-motion/v/projectile-motion-part-3

Funções quadráticas

https://pt.khanacademy.org/math/algebra/quadratics#features-of-quadratic-functions

Explore graphs of trigonometric functions with Desmos web application

https://www.desmos.com/