

PARTE IV: Cinematografia e Matemática

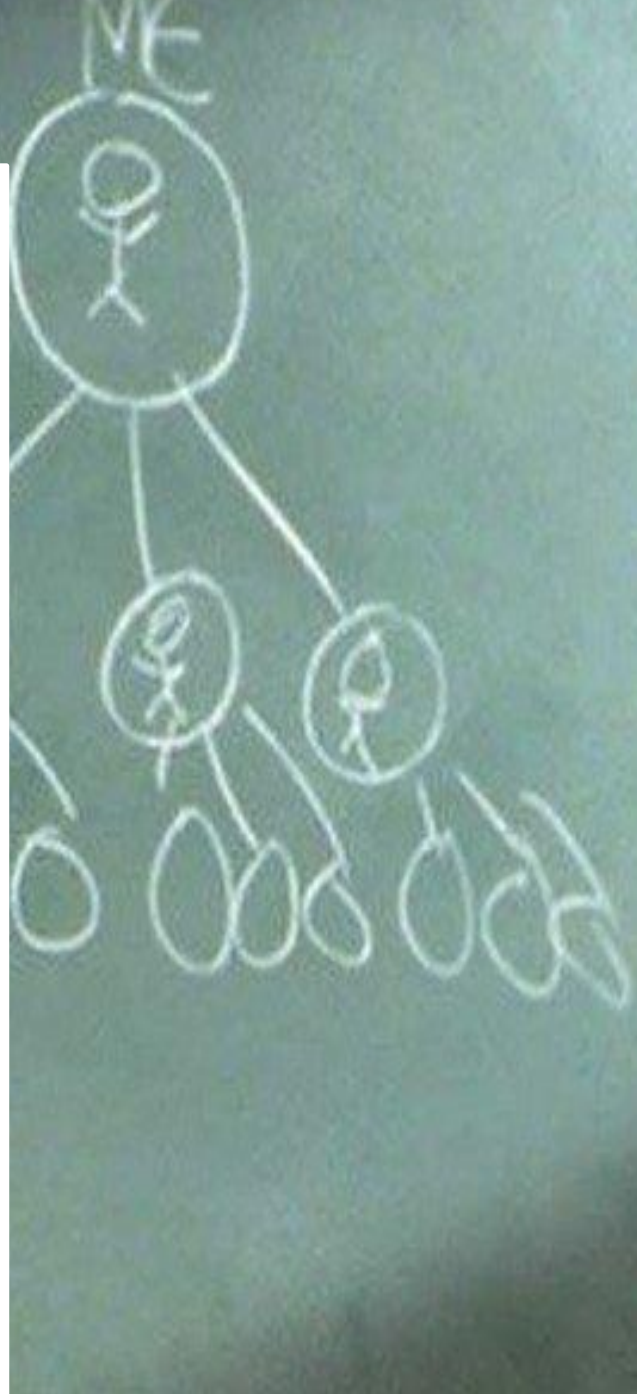
FAIXA ETÁRIA: 16-18

UNIDADE 39: CRESCIMENTO EXPONENCIAL NO FILME “FAVORES EM CADEIA”

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Guia do Professor

Título: Crescimento Exponencial no filme “Favores em Cadeia”

Faixa etária: 16 – 18 anos

Duração: 2 horas

Conceitos matemáticos: Expoentes, Funções Exponenciais, Crescimento Exponencial, Decrescimento Exponencial

Conceitos artísticos: Modelo exponencial

Objetivos gerais: Estudar e analisar exemplos da vida real de crescimento e decrescimento exponencial; colocar em gráfico equações e funções exponenciais.

Instruções e metodologias: Exibir o trailer do filme “Favores em Cadeia” (cujo link se encontra na secção “Informações e Recursos Adicionais”) e sugerir a sua visualização na íntegra em casa

Recursos: Uma caneta e uma calculadora

Dicas para o professor: Para ajudar os alunos a compreender os resultados dos gráficos, deixe-os propor valores diferentes e faça a sua representação gráfica

Resultados de aprendizagem e competências: No final desta unidade o aluno será capaz de:

- Reconhecer e resolver problemas envolvendo a aplicação de funções exponenciais, bem como a representação gráfica mais apropriada para representar funções exponenciais;
- Usar as regras dos expoentes de modo a lidar com funções exponenciais e apresentá-los num gráfico

Síntese e Avaliação:

| | |
|-------------------------------------------------------------|----------------|
| Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade: | 1. 2. 3. |
| Indique 2 conceitos que tenha aprendido: | 1. 2. |
| Indique 1 aspeto a melhorar: | 1. |

Introdução

Por vezes encontram-se aspetos relacionados com a Matemática em séries televisivas ou filmes. Em alguns casos, não é dada muita importância a estes aspetos da Matemática pelo facto de não influenciarem a história em si. Contudo, existem alguns casos em que tal se verifica.

Alguns exemplos incluem: “21” (EUA, 2008), de Robert Luketic; “A Prova” (EUA, 2005), de John Madden; “Uma Mente Brilhante” (EUA, 2001), de Ron Howard; “Enigma” (EUA, 2001), de Michael Apted; “Pi” (EUA, 1998) de Darren Aronofsky; “O Bom Rebelde” (USA, 1997), de Gus Van Sant e “Cubo” (Canadá, 1997), de Vincenzo Natali.

Nesta unidade, o filme “Favores em Cadeia”, de Mimi Leder, será alvo de estudo e serão analisados os conceitos matemáticos nele abordados, tais como o crescimento exponencial.

Favores em Cadeia

Na sequência de um trabalho no âmbito da disciplina de Estudos Sociais, com o objetivo de tornar o mundo um lugar melhor, o jovem Trevor McKinney (interpretado por Haley Joel Osment) dá início a um movimento que consiste em praticar uma boa ação a favor de três pessoas que, em vez de a retribuírem, praticam-na com três outras pessoas, e assim por diante.

Na sua jornada para mudar o mundo, Trevor desencadeia uma série de eventos que poderão ser representados como um modelo exponencial, o que significa que esta ação preenche os requisitos para crescer exponencialmente ao longo do tempo.

O modelo exponencial está associado ao economista britânico Thomas Robert Malthus (1766 – 1834), o primeiro a aperceber-se de que qualquer espécie poderia potencialmente crescer de membros de acordo com uma série geométrica. As funções exponenciais derivaram desta observação.

Na matemática, funções exponenciais são funções que crescem por fatores comuns em intervalos iguais. Este crescimento poderá resultar num aumento ou numa redução do valor que, por este motivo, é conhecido por crescimento exponencial e decrescimento exponencial, respetivamente.

A longo prazo, o crescimento ou o decrescimento tornam-se insustentáveis, já que os nutrientes ou os recursos esgotar-se-ão e o crescimento/decrescimento, por sua vez, parará. Não obstante, o uso de funções exponenciais para prever um resultado é frequentemente usado em negócios, ciência e sociologia, podendo ser verificado também na própria natureza.

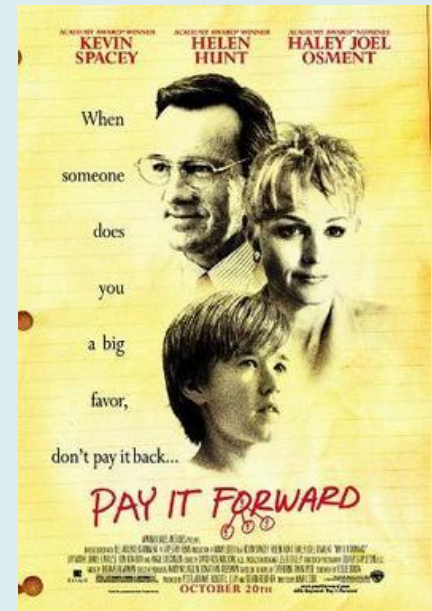


Fig. 1 - Cartaz do filme “Favores em Cadeia” (2000)

(Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/Pay_It_Forward_\(film\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pay_It_Forward_(film)))

Glossário

Expoente: corresponde à multiplicação repetida de uma base “n”: isto é, o produto de bn é a multiplicação da base (b) “n” vezes; chamado “b elevado à potência de n” ou “b elevado à n-ésima potência”.

Função exponencial: uma função da forma $f(x) = a * b^x$, no qual o resultado aumenta exponencialmente à medida que x aumenta.

Crescimento exponencial: um conceito usado quando um valor aumenta proporcionalmente a uma taxa constante ao longo de um período.

Decrescimento exponencial: um conceito usado quando um valor diminui proporcionalmente a uma taxa constante ao longo de um período.

Fator: um número que, quando dividido por outro número, resulta num número natural – ou seja, sem decimais.

A Matemática por trás do filme “Favores em Cadeia”

1. Funções Exponenciais

As funções exponenciais são caracterizadas por terem um **valor que cresce com base num fator comum ao longo de um período igual**, seja um aumento ou uma diminuição de um determinado valor.

A função exponencial representa-se da seguinte forma:

Função Exponencial

$$y = a^x$$

Onde:

a = o valor **inicial** antes de medir o crescimento/decrescimento e é **> 0**

x = um expoente variável que corresponde ao número de intervalos de tempo que passou.

No filme “Favores em Cadeia”, Trevor dá início a um movimento que pode desencadear ações que triplicam exponencialmente.

Ao observar a **tabela de valores** abaixo, analisaremos o potencial deste impacto ao considerar que, por cada dia que passa, cada pessoa envolvida no movimento dará continuidade ao processo ao fazer uma boa ação a 3 outras pessoas:

| Dia | N.º de Pessoas | Padrão |
|-----|-------------------------------------------------|-----------|
| 1 | $3 = 3$ | $y = 3^1$ |
| 2 | $9 = 3 \times (3)$ | $y = 3^2$ |
| 3 | $27 = 3 \times (3 \times 3)$ | $y = 3^3$ |
| 4 | $81 = 3 \times (3 \times 3 \times 3)$ | $y = 3^4$ |
| 5 | $243 = 3 \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$ | $y = 3^5$ |

No 1.º dia, Trevor realizou 3 boas ações a 3 pessoas diferentes; no 2.º dia, cada uma dessas 3 pessoas realizará 3 boas ações a 3 outras pessoas, perfazendo um total de 9 (3×3). Ao 5.º dia, 243 pessoas ($3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$) estarão envolvidas no processo. Por outras palavras, o valor triplica todos os dias!

O progresso de cada mudança pode então ser representado através de um gráfico, como se segue:

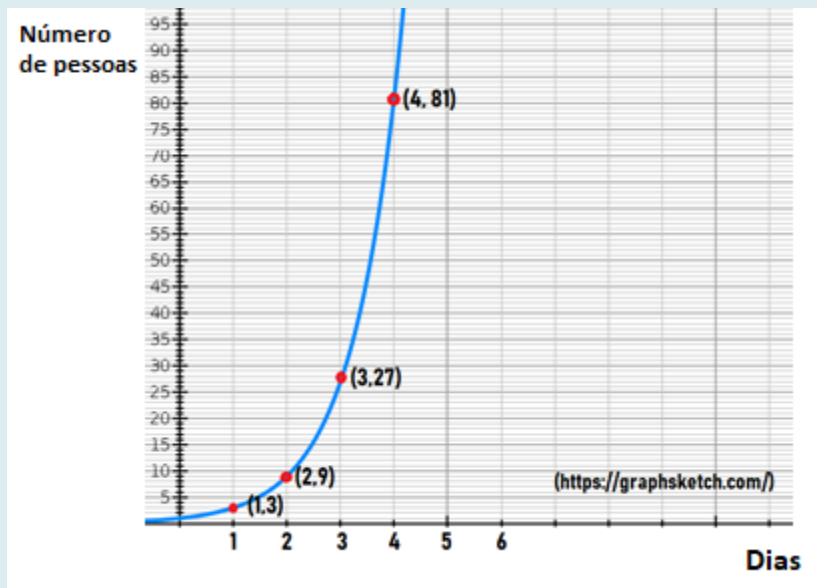


Fig. 2 – Estimativa de pessoas envolvidas no movimento de Trevor
(Fonte: Elaborado pelo Autor em graphsketch.com)

2. Crescimento Exponencial e Decrescimento Exponencial

7

Vimos que as funções exponenciais crescem por fatores comuns. No entanto, se quisermos introduzir casas decimais, as funções de Crescimento Exponencial e Decrescimento Exponencial deverão ser invocadas:

Crescimento Exponencial

$$y = a(1 + r)^x$$

Decrescimento Exponencial

$$y = a(1 - r)^x$$

Onde: a = ao **valor inicial** antes de medir o crescimento/decrescimento;
 r = à **taxa** constante em que o valor inicial será alterado; geralmente representado como uma percentagem e expresso como um decimal;
 x = a um expoente variável que corresponde ao número de intervalos de tempo que passaram.

Quando: $a > 0$ e $r > 0$, existe crescimento exponencial;
 $a > 0$ e $0 < r < 1$, existe decrescimento exponencial.

Crescimento exponencial é geralmente usado para prever o crescimento de uma população, ou juros compostos. Por exemplo, imagine que existe uma população de 2579 habitantes numa pequena cidade próxima e que, em cada ano, se regista um crescimento de 12%. **Quantas pessoas terá a cidade daqui a 5 anos?**

Vamos primeiro representar a função de acordo com o problema. Sabemos que:

- 1) 2579 é o nosso ponto inicial;
- 2) Existe um crescimento de 12% ou 0,12 por ano;

Assim, a função que será usada é $P(5) = 2579(1 + 0,12)^5$, onde “P(5)” corresponde à população em 5 anos.

Relativamente ao cálculo:

$$P(5) = 2579(1 + 0,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 2579(1,12)^5 \Leftrightarrow P(5) = 4545$$

Resposta: Em 5 anos, haverá uma população de, aproximadamente, 4545 pessoas.

A área da Física é outro contexto da vida real no qual funções exponenciais são aplicadas.

As substâncias radioativas são átomos com núcleo instável que decrescem naturalmente. Nesse caso, o **decrecimento exponencial** é usado para prever a quantidade que ainda existirá de uma substância, ou quanto tempo esta durará após um determinado período.

Considerando que uma amostra de 10mg da substância YXZ decresce 0,3% ao ano, **que quantidade da amostra restará após 8 anos?**

Vamos primeiro representar a função de acordo com o problema. Sabemos que:

- 1) 10mg é o nosso ponto de partida;
- 2) Existe um decréscimo de 0,3% ou 0,03 por ano.

Assim, a função que será usada é $P(8) = 10(1 - 0,03)^8$, onde “P(8)” corresponde à quantidade que restará após 8 anos.

Relativamente ao cálculo:

$$P(8) = 10(1 - 0,03)^8 \Leftrightarrow P(8) = 10(0,97)^8 \Leftrightarrow P(8) = \sim 7,83$$

Resposta: Daqui a 8 anos, restará aproximadamente 7,83mg da substância YXZ.

TAREFAS

TAREFA 1

As bactérias são micróbios unicelulares que se reproduzem dividindo-se em duas células.

- 1.1) Crie uma tabela de valores e calcule quantas células se reproduzirão num período de 4 horas, considerando que o valor inicial no final da 1ª hora é de 20.
- 1.2) Descreva o progresso através de um gráfico.

TAREFA 2

Imagine que faz um investimento de 2000€ a uma taxa de juro mensal de 1,5%.

- 2.1) Qual seria o seu saldo após de meio ano? Encontre a função de crescimento exponencial e calcule-a.

TAREFA 3

Na estimativa de pessoas envolvidas no movimento iniciado pelo Trevor, vimos que, no 4.º dia, caso a sequência seguisse ininterrupta, 81 pessoas estariam envolvidas no processo.

Considere que, por uma determinada razão, o movimento estaria suspenso por 5 dias e que, em cada um desses dias, registrar-se-ia uma diminuição de 10% nas pessoas que continuariam o movimento quando a ação fosse retomada.

- 3.1) Quantas pessoas restariam para seguir o movimento ao final do 9.º dia? Encontre a função de decrescimento exponencial e calcule-a.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Enredo do filme “Favores em Cadeia” (2000)

https://www.imdb.com/title/tt0223897/?ref=nm_sr_1?ref=nm_sr_1

Trailer do filme “Favores em Cadeia”

<https://www.youtube.com/watch?v=qfW0wCV9iFI>

Funções de crescimento exponencial

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-exponential-functions/exponential-vs-linear-growth/v/exponential-growth-functions?modal=1>

Problemas de crescimento e decrescimento exponencial

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-exponential-functions/exponential-decay-alg1/v/word-problem-solving-exponential-growth-and-decay>

Características das funções exponenciais (inglês)

<https://mathbitsnotebook.com/Algebra1/FunctionGraphs/FNGTypeExponential.html>