PARTE IV: Cinematografia e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

UNIDADE 36: Probabilidades no filme “21” de Robert Luketic

LogoPsyCom

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guia do Professor

Título: Probabilidades no filme “21” de Robert Luketic

Faixa Etária: 16 – 18 anos

Duração: 2 horas

Conceitos Matemáticos: Fibonacci, fatoriais, permutações, combinações, triângulo de Pascal, probabilidade

Conceitos Artísticos: vinte-e-um, contagem de cartas

Objetivos Gerais: descobrir os conceitos matemáticos apresentados no filme e adquirir uma visão mais prática do uso da matemática num jogo comum

Instruções e Metodologias: os alunos exploram a matemática a jogar cartas e a assistir aos vídeos sugeridos. Esta unidade ajudará a turma a descobrir os diferentes conceitos matemáticos necessários para aprender a probabilidade.

Dicas para o professor: aprender fazendo é muito eficiente, especialmente com alunos mais jovens e com dificuldades na aprendizagem. Explique os aspetos práticos de cada conceito matemático.

Recursos: esta unidade fornece fotografias e vídeos para usar na sala de aula. Os tópicos abordados nesses recursos também o ajudarão a encontrar outros materiais para personalizar e dar nuances às aulas.

Objetivos de aprendizagem e competências: no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- entender fatoriais;
- usar permutações e combinações;
- calcular probabilidades.

Síntese e avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Introdução

Assistir a um filme pode ser uma atividade de lazer ativa ou passiva. Os filmes podem ser recursos valiosos para os alunos explorarem os diferentes tópicos abordados. Alguns deles usam matemática nos seus enredos, nos quais os alunos geralmente não se concentram realmente, embora tenham maior probabilidade de entender um tópico sobre o qual ouviram falar num filme.

Ver os personagens refletirem sobre problemas e conceitos matemáticos faz com que o espetador queira entender esses conceitos e resolvê-los da mesma maneira que costuma tentar adivinhar o final de um filme. Desta forma, aprender-se-ão coisas novas apenas assistindo ao desenrolar da história das personagens.

Portanto, ensinar aos alunos a matemática que se esconde atrás de alguns filmes pode ser uma grande mais-valia para uma aula de matemática, geralmente considerado muito abstrato, dando aos alunos um sentido mais prático e real dos possíveis usos da matemática.

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

“21” de Robert Luketic

Sinopse

Figura 1: Cartaz do filme “21”

O filme “21” é sobre um grupo de estudantes do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) que decidem usar a contagem de cartas para ganhar mais jogos de 21 nos casinos. Este método é muito conhecido e é baseado em probabilidades.

Trailer do filme:
https://www.youtube.com/watch?v=oqkdB7It5Go

Blackjack

Como sabe, este filme é sobre blackjack, mas sabia que o blackjack era originalmente um jogo francês na década de 1760 chamado " Vingt-et-un ", 21 em francês, assim como o título do filme!
Neste filme, Ben é muito bom em matemática e o seu professor pede que ele se junte ao clube de contagem de cartas para jogar em Las Vegas. Ben precisa de dinheiro para pagar a universidade e concorda em jogar até ganhar a quantia necessária. Este filme foi baseado em fatos reais, havia realmente uma equipa do ITM treinada para contar cartas e jogar 21.

Aprenda mais neste documentário:
https://www.youtube.com/watch?v=QflVqavHHM0

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Glossário

MIT: Instituto de Tecnologia de Massachusetts (Massachussets Institute of Technology, em Inglês), uma universidade privada, muito conceituada, nos EUA.

Blackjack: também conhecido como “21”. Trata-se de um jogo de cartas jogado com 52 cartas. É jogado geralmente no casino.

Contagem de cartas: uma técnica usada em jogos de casino, como no Blackjack, para calcular a probabilidade de vitória.

Vingt-et-un: um jogo de cartas francês do século 18 que precedeu o Blackjack.

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

A Matemática por trás de “21”

Atividade de introdução: Sequência de Fibonacci:

O primeiro conceito de matemática que aparece em "21" é a sequência de Fibonacci no bolo de aniversário de Ben. Enquanto estuda matemática no MIT, os seus amigos fizeram-lhe um bolo especial para o seu aniversário. A sequência de Fibonacci é aquela em que começa com os números 0 e 1 e cada número a seguir é a soma dos dois anteriores. É assim: 0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 1 + 2 = 3; 2 + 3 = 5 e assim sucessivamente.

Figura 2: Imagem da cena do aniversário do filme “21”

Os números no bolo de Ben são 0,1,1,2,3,5,8,13 ... Porque é que os amigos de Ben pararam por aí? Será que consegue adivinhar a idade de Ben?

Resposta: O próximo número é 21, que não é apenas a idade de Ben, mas também o título do filme!

1. Fatoriais

Jogos de sorte nem sempre dependem tanto da sorte. Pode usar algo chamado probabilidade para estimar a sua probabilidade de ganhar o jogo.

Antes de aprender a calcular probabilidades, vamos começar com um pequeno vídeo sobre como organizar 52 cartas:

https://www.youtube.com/watch?v=uNS1QvDzCVw.

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Esperava isto? Agora entendemos por é que esses alunos precisavam treinar tanto antes de ir para Las Vegas!

Como viu no vídeo, o número de arranjos possíveis para um grupo de elementos é designado de "fatorial".

Lembre-se desta fórmula:

o fatorial **n!** é igual a:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

ou

$$n! = n \times (n-1)!$$

Se quiser calcular uma divisão de fatoriais, não se esqueça de simplificá-lo da seguinte forma:

$$\frac{10!}{6!} = \frac{10x9x8x7x6x5x4x3x2x1}{6x5x4x3x2x1} = \frac{10x9x8x7x\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Lembre-se: geralmente assume-se que 0! = 1

2. Permutações

A permutação de um conjunto de elementos é um arranjo ordenado de todos os elementos desse conjunto.

Uma Permutação, escrita ${}_nP_r$, ${}^nP_r$ ou P(n, r), pode permitir repetições ou não:

- **Permutações com repetição**: são fáceis de calcular, pois existem n elementos, o número de itens para escolher, e r opções.

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

A fórmula é: $n^r = n \times n \times n\ldots$ (vezes r)

Exemplo:

Se precisamos de encontrar um código de três dígitos para bloquear o telefone em que pode haver repetições, temos 10 números para escolher e 3 opções para fazer.

n = 10 e r = 3

$^{10}P_3 = 10^3 = 1000$

- **Permutações sem repetição**: a diferença é que reduzimos o número de opções. Para evitar repetições, a fórmula não já não é n x n x n x… mas torna-se n x (n-1) x (n-2) x (n-3)… = n! o fatorial. No entanto, se quisermos escolher apenas r desses números, podemos reduzir a fórmula para $^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Exemplo:

Estamos a jogar bilhar e temos 16 bolas de bilhar numeradas de 1 a 16. Cada um dos números aparece uma única vez, para que não haja repetições. Existem 16 x 15 x 14 x 13 x 12 x 11… x 2 x 1 permutações.

Se quisermos escolher 5 números, o cálculo será diferente:

$$^{16}P_5 = \frac{16!}{(16-5)!} = \frac{16!}{11!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times \cancel{11!}}{\cancel{11!}} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 524\,160$$

2. Combinações

A combinação de um conjunto de elementos é um arranjo não ordenado de todos os elementos desse conjunto

- **Combinações sem repetição**:

digamos que queremos jogar 21 e dez pessoas sentam-se em cinco cadeiras à volta da mesa. Se tentarmos encontrar o número de permutações existentes, usaríamos a fórmula

$$^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

O cálculo seria:

$$ {}^{10}P_5 = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{(10-5)!}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{5!}} = \frac{\mathbf{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}}{\mathbf{5!}} = \mathbf{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = 30\,240 $$

Nesse caso, não nos preocupamos com a ordem, portanto, precisamos dividir esse número pelo número de maneiras possíveis de organizar cinco pessoas:

$$ {}^{n}C_r = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-r)!}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r!}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{r!(n-r)!}} $$

Vamos aplicar esta fórmula ao nosso caso:

$$ {}^{10}C_5 = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{5!(10-5)!}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{5! \times 5!}} = \frac{\mathbf{10!}}{\mathbf{120 \times 120}} = \frac{\mathbf{3\,628\,800}}{\mathbf{14\,400}} = 252 $$

Também pode usar o triângulo de Pascal, que é apreçado pelos matemáticos desde que foi descoberto.

Descubra mais ao assistir ao seguinte vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=XMriWTvPXHI&t=80s

Só precisa ir até a enésima linha e escolher o r-ésimo número (a primeira linha e o número é a linha 0).

Vamos tentar com este exemplo:

Está num jogo de blackjack e precisa sentar 4 pessoas em 3 cadeiras. De acordo com o triângulo de Pascal, haverá 4 combinações.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Vejamos com a fórmula:

$$ {}^{4}C_3 = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{3!(4-3)!}} = \frac{\mathbf{4!}}{\mathbf{3!1!}} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{6 \times 1}} = \mathbf{4} $$

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Aqui está outro exemplo:

Se temos um jogo de 52 cartas que queremos dividir em mãos de 2 cartas para jogar 21, quantas combinações existem dessas duas cartas?

$^{52}C_2 = \frac{52!}{2!(52-2)!} = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \times 51}{2!} =$ 1 326 combinações

- **Combinações com repetição**:

Aqui, a ordem não importa, mas pode repetir várias vezes a mesma escolha.

Os amigos de Ben precisam escolher 4 sabores para o bolo de aniversário de Ben entre os 7 sabores oferecidos. Vamos chamá-los de A, B, C, D, E, F e G.

Quantas combinações com repetição teremos?

A, B, C, D, E, F, G: onde:

- V são os ingredientes escolhidos e
- → são os movimentos (de A para B, B para C, C para D, etc.)

A A D F	V V → → → V → → V →
C E E G	→ → V → → V V → → V
B C F F	→ V → V → → → V V →

...

Pode notar que existem sempre 6 →e 4 V. Isso leva-nos à transformação da fórmula para combinações sem repetições e fornece a fórmula para combinações com repetições:

$$^{n}C_r = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Apliquemos a fórmula ao nosso problema:

$^{7}C_4 = \frac{(4+7-1)!}{4!(7-1)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10!}{24 \times 720} = \frac{3\,628\,800}{17\,280} =$ 210

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

4. Probabilidade

A probabilidade é usada para se ter uma ideia mais precisa das hipóteses de que algo aleatório aconteça.

Escrceve-se P (A) e é sempre um valor entre 0 e 1.

Lembre-se: **$0 \leq P\ (A) \leq 1$**

Como dois eventos contrários completam todas as possibilidades: **$P\ (A_C) + P\ (A) = 1$**

Para calculá-lo, dividimos o número de casos prováveis pelo número de casos possíveis, sendo os acontecimentos elementares equiprováveis:

$$\frac{\#\ \textbf{casos favoráveis ao nosso acontecimento}}{\#\ \textbf{casos possiveis}}$$

Isto significa que, por exemplo, quando atira um dado, tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de sair "um 4" e $\frac{2}{6}$ de probabilidade de sair "um 4 ou um 5". É, no entanto, impossível sair "um 4 e um 5" simultaneamente, por esta última probabilidade é $\frac{0}{6}$.

Exemplo: O problema de Monty Hall

Numa das suas aulas, o professor de Ben coloca um problema matemático em que:

- Existem três portas na sua frente;
- Atrás de uma das portas, há um carro novo;
- Atrás dos outros dois há cabras.
- Quer ficar com o carro novo, mas há $\frac{1}{3}$ de probabilidade de ficar com o carro e $\frac{2}{3}$ de probabilidade de ficar com uma cabra.

Bem escolhe a porta 1 e o seu professor mostra que atrás da porta número 3 há uma cabra. O professor perguntar a Bem se ele quer manter a porta 1 ou se deseja mudar. Agora que Ben sabe onde está uma das cabras, deveria aproveitar esta segunda oportunidade?

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

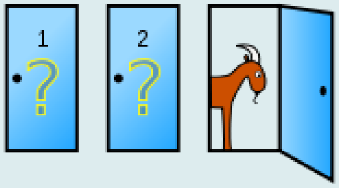

Figura 3: Representação visual do problema de Monty Hall

Pode ver a resposta aqui:
https://www.youtube.com/watch?v=8DMnAAvakh0

Outro exemplo:

Tem 12 cartas nas suas mãos e o seu vizinho precisa escolher uma. Nessas 12 cartas, tem três dez, cinco reis, dois ases e dois quatros. Qual é a probabilidade do seu vizinho escolher um rei?

Os resultados possíveis são: {10, 10, 10, R, R, R, R, A, A, 4, 4}

Então, a probabilidade de conseguir um rei, P (R) $=\frac{5}{12}$.

Antes de prosseguirmos, precisa conhecer algumas fórmulas para estes cálculos específicos:

Para calcular a probabilidade de dois acontecimentos que ocorrem ao mesmo tempo, multiplique as suas probabilidades.

P(A∩B) = P(A) x P(B)

Num jogo com 52 cartas, qual a probabilidade de escolher um Valete e uma Dama?

$P(V \cap D) = P(V) \times P(D)$

$P(V \cap D) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{169} = 0{,}006$

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Para calcular a probabilidade de pelo menos um dos dois acontecimentos se verificar, adicione as probabilidades e subtraia a probabilidade de ambos acontecerem ao mesmo tempo.

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

Por exemplo, num jogo de 52 cartas, qual a probabilidade de escolher uma dama ou um valete?

P(D∪V) = P(D) + P(V) – P(D∩V)

P(D∪V) = $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{169} = \frac{13}{169} + \frac{13}{169} - \frac{1}{169} = \frac{25}{169} = \mathbf{0,148}$

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

TAREFA

Vamos jogar blackjack:

Jogamos blackjack com 52 cartas; cada cartão tem o seu próprio valor. O objetivo do jogo é ter uma soma de 21 pontos. Um ás e uma carta de 10 pontos são a melhor mão. O ás tem o valor de 1 quando a soma for superior a 21. Todos os jogadores recebem duas cartas com a face voltada para cima. O "dealer" recebe uma carta voltada para cima e uma voltada para baixo. Se o "dealer" tiver 21 pontos, ele mostra as suas cartas e ganha a aposta juntamente com os jogadores que também têm 21. Se o dealer perder, é a vez dos outros jogadores decidirem ficar com as cartas e receberem mais uma, dividirem em duas mãos diferentes ou terminar e receber metade da aposta.

Aqui estão os valores de todas as cartas:

Ás	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Valete	Dama	Rei
1 or 11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	10	10

Figura 4: Imagem de um jogo de cartas de cassino

Temos cinco jogadores à volta da mesa. Cada um tem 2 cartas. Entre essas cartas, há quatro ases, dois dez, um valete, um quatro e dois cincos. Qual é a probabilidade de obter duas cartas que somam 21?

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS:

Fatorial:

https://www.youtube.com/watch?v=uNS1QvDzCVw

Triangulo de Pascal:

https://www.youtube.com/watch?v=XMriWTvPXHI&t=80s

Probabilidades:

https://www.youtube.com/watch?v=3V2omKRX9gc

Probabilidades:

https://www.youtube.com/watch?v=Kgudt4PXs28

A resposta de Ben ao problema de Monty Hall:

https://www.youtube.com/watch?v=8DMnAAvakh0

Documentário sobre a equipa do ITM:

https://www.youtube.com/watch?v=QflVqavHHM0

O apoio da Comissão Europeia à produção desta publicação não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.