

PARTE III: Teatro e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

Board of weights and measures
(Source: Claus Adlert from Wikimedia Commons)

UNIDADE 30: VOLUMES: O PROBLEMA DOS 21 VASOS (O HOMEM QUE SABIA CONTAR, CAP. VIII)

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guia do Professor

Título: Volumes: o problema dos 21 vasos (O Homem que Sabia Contar, Cap. VIII)

Faixa Etária: 13 – 15 anos

Duração: 3 horas

Conceitos Matemáticos: Volumes

Conceitos Artísticos: Representação teatral

Objetivos Gerais: serem capazes de representar a cena da divisão dos 21 vasos e de calcularem volumes de sólidos geométricos.

Instruções e Metodologias: além da explicação de como ensaiarem a representação, é importante que se deem exemplos do cálculo de volumes antes dos alunos resolverem os exercícios.

Recursos: calculadora científica e os materiais necessário para a representação teatral (cf. guião anexado).

Dicas para o professor: mostrar aos alunos o vídeo da representação da cena dos 21 vasos e ajudá-los a ensaiarem a representação desta cena. Começar por dar vários exemplos do cálculo de volumes de sólidos, com grau de dificuldade crescente, para explicar como se deve proceder, para que depois os alunos possam resolver os exercícios sozinhos.

Resultados de aprendizagem e competências: no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Compreender as soluções apresentadas para o problema dos 21 vasos;
- Representar a cena em causa;
- Calcular volumes de sólidos geométricos.

Síntese e Avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

Introdução

Ao longo da História foram muitos os problemas que foram surgindo e para os quais a Matemática encontrou resposta. Existem muitos relatos disso mesmo e ninguém tem dúvida da importância da Matemática na resolução desses problemas e do seu contributo para a evolução das diversas civilizações ao longo da História.

Quem é que nunca ouviu um conto, ou leu ou livro, em que a Matemática acabe por estar envolvida na resolução de algum problema ou enigma?

Nesta unidade vamos abordar um problema que aparece num livro cheio destas situações. Esse livro, “O homem que sabia contar”, foi escrito em 1938 por Malba Tahan (pseudónimo do professor/escritor Júlio César de Mello e Souza), onde se conta a história de Beremiz Samir, um viajante persa com o dom da Matemática que em cada lugar que passa, usando o raciocínio lógico e aplicando outros conceitos matemáticos, ajuda a resolver problemas do quotidiano.

O Problema dos 21 vasos

No livro “O homem que sabia contar”, de Malba Tahan, pseudónimo do escritor Brasileiro Júlio César de Mello e Souza, são recriados vários problemas e quebra-cabeças matemáticos envolvendo aritmética, álgebra, geometria e outras áreas da Matemática.

O livro conta a história de Hanak, um homem que está a viajar de Samarra até Bagdad. Pelo caminho ele conhece Beremiz Samir, um homem persa com elevadas capacidades matemáticas e convida-o a juntar-se a si na viagem. Para Hanak, era certo que um homem com tanta habilidade matemática iria encontrar um trabalho bem remunerado em Bagdad.

Um dos problemas apresentado neste livro é uma divisão de 21 vasos de vinho por 3 amigos e criadores de carneiros que se revelava tarefa muito complicada.

No livro, Beremiz e Hanak encontram-se com o Sheik Salam Nasair e os seus amigos, os criadores de carneiros, e o Sheik pede a Beremiz que resolva o seu problema que diz respeito à divisão de 21 vasos de vinho.

De acordo com o livro, o Sheik diz o seguinte a Beremiz:

“Aqui estão, ó calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora os problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte: como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdad, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21 vasos iguais, sendo: 7 cheios, 7 meio cheios e 7 vazios.

Querem agora dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade ao meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão.”¹

Para resolver este problema, Beremiz pensou, em silêncio, durante 2 ou 3 minutos e afirmou:

“Vou indicar a solução que me parece mais simples.

Ao primeiro sócio caberão: 3 vasos cheios; 1 meio cheio; 3 vazios. Receberá, desse modo, um total de 7 vasos. Ao segundo sócio caberão: 2 vasos cheios; 3 meio cheios; 2 vazios. Este receberá também 7 vasos. A cota que tocará ao terceiro sócio será igual à do segundo, isto é: 2 vasos cheios; 3 meio cheios; 2 vazios.

Segundo a partilha que acabo de indicar, cada sócio receberá 7 vasos e a mesma porção de vinho.”¹

Esta solução proposta por Beremiz sem dúvida que resolve o problema já que **cada amigo receberá 7 vasos e a mesma quantidade de vinho** (Fig. 1).

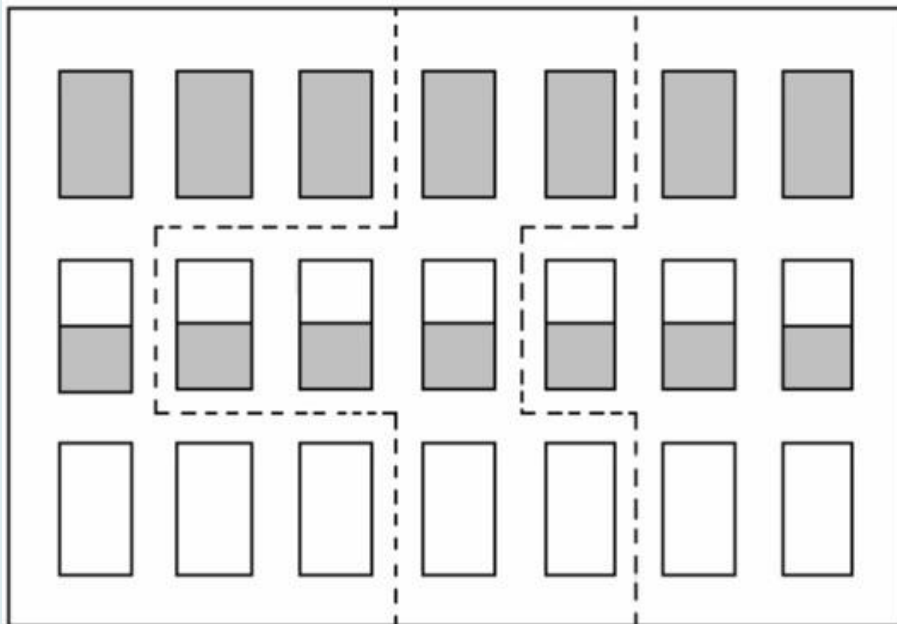


Fig. 1 – Solução proposta por Beremiz

Fonte: Taham, M. (n.d.). O Homem que sabia contar. Retirado de: http://josenorbeto.com.br/o_homem_que_calculava.pdf (16.07.2019))

Beremiz fez questão de provar que a quantidade de vinho era a mesma e fê-lo atribuindo à porção de vinho em cada a cada vaso cheio o valor 2 e o valor 1 à porção de vinho em cada vaso meio cheio.

¹ Tahan, M. (n.d.). O Homem que Calculava. Retirado de: http://josenorbeto.com.br/o_homem_que_calculava.pdf (16.07.2019).

Assim ele afirmou:

- “O primeiro sócio de acordo com a partilha, receberá: $2 + 2 + 2 + 1$. E essa soma é igual a 7 unidades de vinho. E cada um dos outros dois sócios receberá: $2 + 2 + 1 + 1 + 1$. E essa soma é também igual a 7 unidades de vinho. E isso vem provar que a divisão por mim sugerida é certa e justa.”¹

Uma outra solução poderia ser aquela em que um criador de carneiros deve receber 1 vaso cheio, 5 meio cheios e 1 vazio. Os outros dois devem receber 3 vasos cheios, 1 meio cheio e 3 vazios.

Para resolver este dilema, Beremiz recorreu à aritmética, mas se considerarmos apenas a parte da divisão do vinho temos também aqui uma questão de volumes que será o conceito que vamos abordar neste módulo.

Glossário

Bagdad: Antigo centro do mundo islâmico. Atual capital do Iraque.

Damasco: Capital e maior cidade da Síria.

Persa: Pessoa natural da Pérsia (termo usado pelos gregos da era clássica e pelos ocidentais para se referir a toda planície do Irã).

Samarra: Cidade no Iraque, localizada na margem oriental do rio Tigre, na província de Saladino, a 125 quilómetros ao norte de Bagdad.

Sheik: Título honorífico em língua árabe, com o significado de "líder" ou "governador".

A Matemática por trás de “O Problema dos 21 Vasos”

Tal como referido anteriormente, se considerarmos apenas a parte da divisão do vinho, temos um problema de volumes e assim vamos aproveitar para rever esse conceito.

Volumes

O **volume de um sólido geométrico** é o espaço ocupado por este.

As unidades de volume mais utilizadas são o metro cúbico (m^3), o decímetro cúbico (dm^3) e o centímetro cúbico (cm^3), sendo que 1 metro cúbico (m^3) de volume corresponde à capacidade de 1000 litros e 1 decímetro cúbico (dm^3) de volume corresponde à capacidade de 1 litro.

De acordo como Sistema Internacional de unidade (SI), o metro cúbico é a unidade padrão das medidas de volume.

Simplifiquemos as fórmulas dos volumes dos sólidos fazendo uma divisão em “sólidos com duas bases”, “sólidos com uma base” e “sólido sem bases”.

8

Volume de “sólidos com duas bases”

O volume do cubo, do paralelepípedo, do prisma (triangular, pentagonal,...), do cilindro, sólidos com duas bases, é sempre igual ao produto da área da base pela altura.

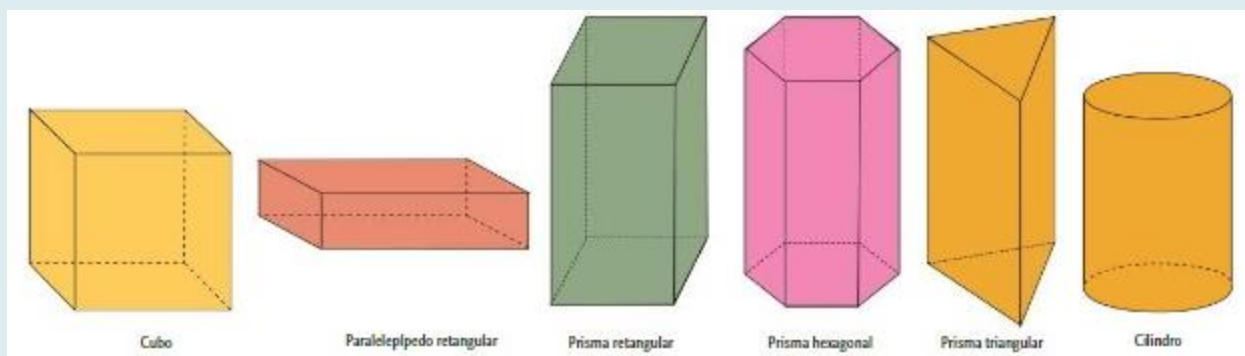


Fig. 2 – Sólidos com duas bases

(Fonte: Imagem adaptada de Ação Educativa (2015, Julho 3). Mundo em construção – 8º ano. Retirado de: https://issuu.com/acaoeducativa/docs/8_ano_-_mundo_em_construcao_o_alu/404 (16.07.2019))

$$V = A_b \times h, \text{ onde } A_b - \text{área da base e } h - \text{altura}$$

Exemplo: Calcula o volume do seguinte prisma retangular (fig. 3):

$$V = A_b \times h = (1 \times 8) \times 5 = 40 \text{ cm}^3$$

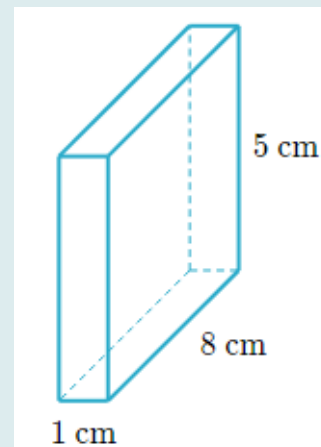


Fig. 3 – Prisma retangular

(Fonte:

https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa/volume-rect-prism/e/volume_1)

Volume de “sólidos com uma base”

9

O volume da pirâmide e do cone, sólidos com uma só base, é sempre igual ao produto de 1/3 da área da base pela altura.

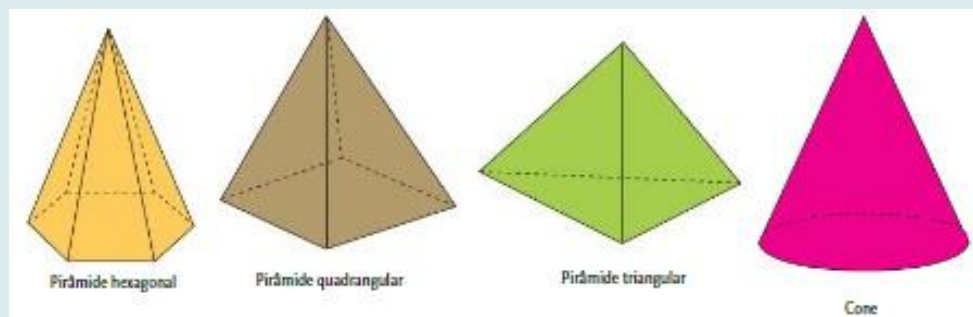


Fig. 4 – Sólidos com uma base

(Fonte: Imagem adaptada de Ação Educativa (2015, Julho 3). Mundo em construção – 8º ano. Retirado de: https://issuu.com/acaoeducativa/docs/8_ano_-_mundo_em_construcao_alu/404 (16.07.2019)

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h, \text{ onde } A_b - \text{área da base e } h - \text{altura}$$

Exemplo: Calcula o volume do seguinte cone (fig. 5), sabendo que as medidas estão em centímetros:

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h = \frac{1}{3} (\pi \times 2^2) \times 9 = \frac{1}{3} (4\pi) \times 9 = \frac{36\pi}{3} = 12\pi \text{ cm}^3$$

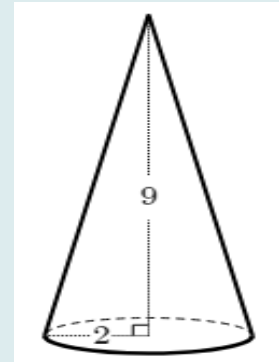


Fig. 5 – Cone

(<https://www.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa/volume->

Volume de “sólidos sem bases”

O volume da esfera, sólido sem bases, é igual ao produto de $\frac{4}{3}$ por πr^3 .

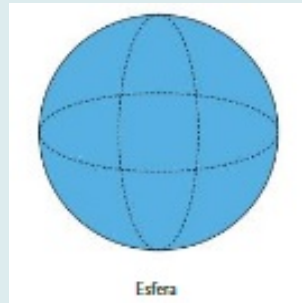


Fig. 6 - Esfera

(Fonte: Imagem adaptada de Ação Educativa (2015, Julho 3). Mundo em construção – 8º ano. Retirado de: https://issuu.com/acaoeducativa/docs/8_ano_-_mundo_em_constru___o_alu/404 (16.07.2019)

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3} \times \pi r^3, \text{ onde } r \text{ – raio da esfera}$$

Exemplo: Calcula o volume da seguinte esfera (fig. 7), sabendo que as medidas estão em centímetros:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi r^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 27 = \frac{108\pi}{3} = 36\pi \text{ cm}^3$$

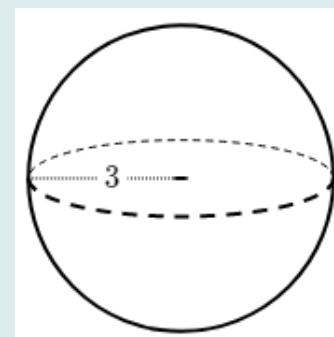


Fig. 7 - Esfera

(Source: <https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa/volume-cones/e/volume-of-spheres>)

TAREFAS

TAREFA 1

Proponha uma representação do capítulo 8 do livro “O Homem que Sabia Contar”, cujo guião adaptado se encontra anexado no final da unidade.

TAREFA 2

O cubo da figura 8 tem de aresta 6 cm e a pirâmide sombreada tem de altura um terço da altura do cubo.

- 2.1. Determina o volume do cubo.
- 2.2. Determina o volume da pirâmide.
- 2.3. Determina o volume do cubo não ocupado pela pirâmide.

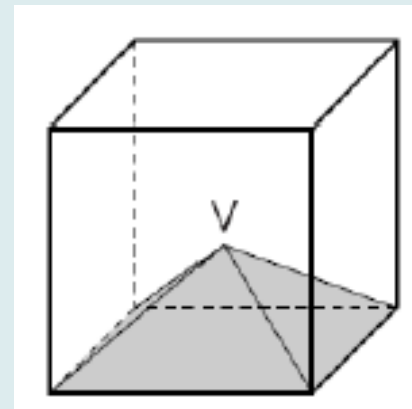


Fig. 8 - Cube e Pirâmide
(Fonte: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A1 – Ensino Profissional: Geometria. Porto: Porto Editora.)

11

TAREFA 3

Num vaso cilíndrico com 20 cm de diâmetro foi colocada uma certa quantidade de água (fig. 9). Seguidamente, introduziu-se uma esfera metálica no vaso com 6 cm de diâmetro e verificou-se que o nível da água ficou exatamente “tangente” à esfera. Qual o volume de água que foi colocado no vaso?

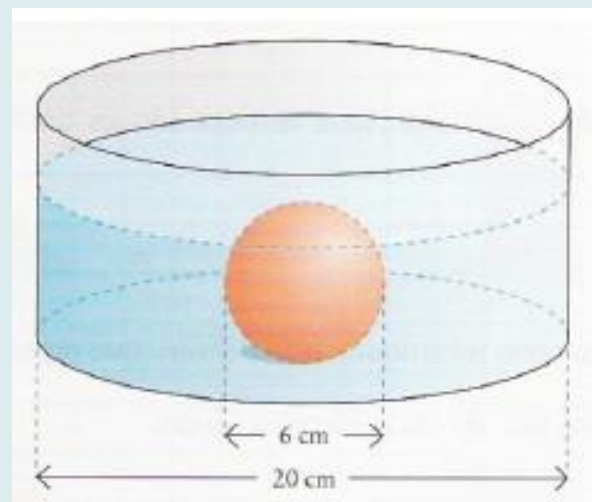


Fig. 9 – Vaso cilíndrico e esfera
(Source: Neves, M. A, Pereira, A., Leite, A., Guerreiro, L., & Silva, M. C. (2006). Matemática A1 – Ensino Profissional: Geometria. Porto: Porto Editora)

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Versão online do livro “O Homem que sabia contar”

<https://sparthasarathy.com/ebooks/themanwhocounted.pdf> (Versão em Inglês)

http://josenorberto.com.br/o_homem_que_calculava.pdf (versão em Português do Brasil)

Representação do capítulo dos 21 vasos numa sala de aula:

<https://www.youtube.com/watch?v=J2FIRSLCrQA>

Volumes

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/solidos_geometricos.htm

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-volume-sa>

Calculadora de volumes

<http://www.calcularvolume.com/>

PEÇA DE TEATRO: “O Problema dos 21 Vasos”

(adaptado do livro “O Homem que Calculava”)

Elenco:

- Hanak Tade Maia;
- Beremiz Samir;
- Sheik Salem Nasair;
- 1º muçulmano criador de carneiros;
- 2º muçulmano criador de carneiros;
- 3º muçulmano criador de carneiros.

Materiais necessários:

- 21 recipientes de tamanhos iguais (por exemplo, garrafas ou copos);
- 1 garrafa de água,

13

[Nesta cena, estão presentes os 3 criadores de carneiros e o Sheik Salem Nasair. Estão todos sentados a fraternizar. O Hanak Tade Maia e o Beremiz Samir aproximam-se.]

Sheik Salem Nasair (com os braços no ar): Aqui está ele, o estimado mestre calculista! Bem-vindo, meu amigo!

Beremiz Samir: Como estás, meu amigo?

[O Sheik e o Beremiz abraçam-se].

Beremiz Samir: Este é o meu amigo Hanak. Ele convidou-me para juntar-me a ele na sua viagem.

Hanak Tade Maia: Viva, Sheik! É um prazer conhecê-lo.

Sheik Salem Nasair: Viva, Hanak! Se é amigo do Beremiz, então também é meu amigo! E estes são os meus amigos de Damasco.

[Os três muçulmanos levantam-se e cumprimentos os viajantes]

1º muçulmano: Marhabaan almusafirin!

2º muçulmano: “Marhabaan!

3º muçulmano: “Marhabaan! Kayf halikm?

[Beremiz e Hanak cumprimentam os três homens]

Beremiz Samir: Então, Nasair, como estás?

Sheik Salem Nasair: Bem, Beremiz, eu estou muito bem, obrigado, mas os meus amigos enfrentam um dos problemas mais curiosos que alguma vez vi. Talvez tu consigas resolvê-lo, uma vez que possuis habilidades matemáticas extraordinárias!

Beremiz Samir: Qual é o problema?

Sheik Salem Nasair: Os meus três amigos são criadores de carneiros em Damasco e, como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdade, uma quantidade de vinho excelente, muito fino, composta de 21 recipientes com o mesmo tamanho. No entanto, estão 7 cheios, 7 meio cheios e 7 vazios.

Beremiz Samir: Compreendo.

Sheik Salem Nasair: Neste sentido, eles querem dividir o vinho de maneira a que cada um receba o mesmo número de recipientes e a mesma quantidade de vinho.

1º muçulmano: Dividir os recipientes de vinho é fácil: cada um receberá 7 recipientes.

[Os outros dois muçulmanos concordam com a afirmação e abanam a cabeça mostrando consentimento.]

Sheik Salem Nasair: A dificuldade, a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os recipientes, isto é, conservando-os exatamente como estão.

Beremiz Samir: Sim, estou a compreender.

Hanak Tade Maia: Beremiz, achas que possível encontrar uma resposta satisfatória para este problema?

2º muçulmano: Será possível, ó calculista, obter uma solução para este problema?

Beremiz Samir: Creio que sim. Deixem-me pensar um pouco.

[Beremiz baixa a cabeça e divaga um pouco, às voltas, tentando pensar numa solução para o problema. Uns segundos depois, Beremiz levanta a cabeça e dirige-se a todos]

15

Beremiz Samir: A divisão dos 21 recipientes, que acabam de apresentar, poderá ser feita sem grandes cálculos. Vou indicar a solução que me parece mais simples.

1º muçulmano: Por favor, diga-nos o que devemos fazer.

[Beremiz dirige-se ao 1º muçulmano.]

Beremiz Samir: Receberá três recipientes cheios de vinho, um meio cheio e três vazios, o que perfaz um total de 7 recipientes.

[Depois, Beremiz dirige-se para o 3º muçulmano.]

Beremiz Samir: Receberá dois recipientes cheios de vinho, três meio cheios e dois vazios, o que perfaz um total de 7 recipientes.

[Por fim, Beremiz dirige-se ao 3º muçulmano.]

Beremiz Samir: Receberá dois recipientes cheios de vinho, três meio cheios e dois vazios, o que perfaz um total de 7 recipientes.

[Depois disto, Beremiz dirige-se ao Sheik Nasair.]

Beremiz Samir: According to my division, each party will acquire seven casks and an equal quantity of wine.

Sheik Salem Nasair: Receio não ter compreendido a divisão que fizeste.

Hanak Tade Maia: Eu também não, Beremiz.

Beremiz Samir: Não há problema, permitam-me que explique o raciocínio por trás desta divisão: consideremos que um recipiente cheio de vinho é composto por duas porções, e que um recipiente meio cheio é composto por uma porção, certo?

Sheik Salem Nasair: Certo.

Hanak Tade Maia: Certo.

Beremiz Samir: Desta maneira, de acordo com a divisão, o 1º muçulmano receberá $2 + 2 + 2 + 1$, o que perfaz um total de 7 porções. Estão a compreender?

Sheik Salem Nasair: Sim.

Hanak Tade Maia: Sim, faz sentido.

Beremiz Samir: Consequentemente, cada um dos restantes muçulmanos receberá $2 + 2 + 1 + 1 + 1$, e essa soma é também igual a 7 porções de vinho.

Sheik Salem Nasair and Hanak: Ahh! Agora eu entendo!

Beremiz Samir: E isso vem provar que a divisão por mim sugerida é certa e justa. O problema que na aparência é complicado, não oferece a menor dificuldade quando resolvido numericamente.

[A solução de Beremiz foi recebida com muito entusiasmo por todos, particularmente os três homens de Damasco.]

17

1º muçulmano: Por Alá! Esta calculadora é incrível! Num instante, ele resolveu um problema que parecia impossível para nós!

2º e 3º muçulmanos: Por Alá!

1º muçulmano: Shukraan jazilaan.

2º e 3º muçulmanos: Shukraan.

Beremiz Samir: De nada! Fico feliz por ter ajudado!