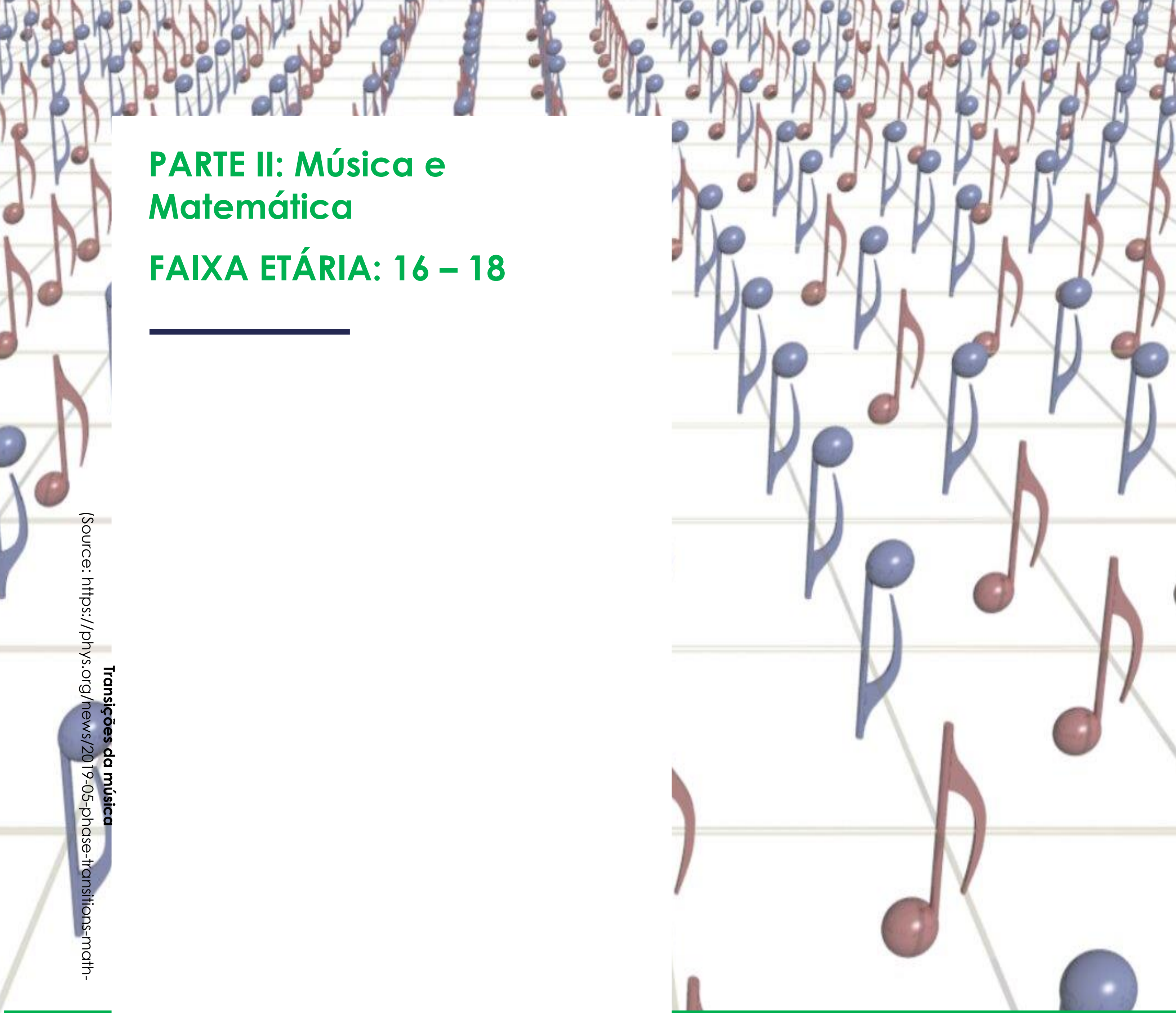

Transições da música
(Source: https://phys.org/news/2019-05-phase-transitions-math-

PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

UNIDADE 27: LOGARITMOS NA ESCALA TEMPERADA

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: Logaritmos na Escala Temperada

Faixa Etária: 16 – 18 anos

Duração: 3 horas

Conceitos Matemáticos: Logaritmos, propriedades dos logaritmos, regras de operação dos logaritmos

Conceitos Artísticos: Escala temperada de 12 notas, notas musicais e frequência das notas musicais

Objetivos Gerais: Perceber o conceito de logaritmo, as propriedades da função logaritmo e calcular alguns logaritmos

Instruções e Metodologias: Será útil utilizar uma calculadora gráfica (pode ser a calculadora gráfica online Desmos) para mostrar o gráfico da função logaritmo aos alunos e para verificarem soluções das tarefas propostas

Recursos: Computador com ligação à internet; Acesso ao website https://www.desmos.com/

Dicas para o professor: Começar por dar vários exemplos do cálculo de logaritmos, com grau de dificuldade crescente e explicar as suas propriedades e que alterações sofrem consoante a mudança da sua base.

Resultados de aprendizagem e competências:

No final deste módulo, o aluno será capaz de:

- Obter o gráfico de uma função logarítmica;
- Calcular o valor de logaritmos de diferentes bases.

Síntese e Avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

Introdução

A Matemática e a Música estão relacionadas desde sempre, no entanto, apenas no século VI a.C., existem as primeiras evidências dessa relação. Pitágoras comparou o som produzido por martelos, usados por ferreiros, de diferentes comprimentos com os sons produzidos por um monocórdio, do qual supostamente Pitágoras terá sido o inventor. Com esta comparação Pitágoras descobre as razões matemáticas por trás dos sons.

Pitágoras aprimorou as razões matemáticas por trás dos sons, através do estudo dos sons que o monocórdio produzia. Dividiu a corda em duas partes iguais, de seguida em três partes iguais e assim sucessivamente. Foi combinando os sons matematicamente consoante as subdivisões que ia fazendo e criou escalas onde cada nota mantinha uma relação bem definida com a outra.
Com o passar do tempo as notas foram denominadas conforme as conhecemos atualmente.

Outras escalar musicais foram criadas por outras culturas e povos, por exemplo o povo Chinês criou a escala pentatónica.
Na cultura ocidental foi adaptada uma escala com 12 notas, denominada de escala temperada ou escala cromática.

Logaritmos na Música

Pitágoras, no século VI a.C., usou o monocórdio para estudar a relação entre o comprimento da corda vibrante e o tom musical que ela produz.
Imagine-se uma corda esticada e presa nas extremidades. Essa corda vibra quando tocada no meio, produzindo um som que é chamado de nota fundamental. De seguida Pitágoras dividiu a corda em duas partes iguais, depois em três partes iguais e continuou a fazer subdivisões, obtendo os harmónicos da nota fundamental, e foi combinando matematicamente os sons. Dá-se assim a criação das escalas, onde cada nota mantém uma relação bem definida com a outra.

Mantendo-se os intervalos (razão numérica de $\frac{3}{2}$) entre as notas e partindo do intervalo de oitava dado pelas frequências $\mathbf{f_0}$ e $\mathbf{2f_0}$ pode-se formar a escala diatónica pitagórica. As notas obtidas, que vulgarmente conhecemos por Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, formam a chamada escala diatónica de sete notas que durante séculos foi a base de outras escalas.

A partir da Idade Média observou-se que ocorriam alguns problemas (por exemplo as notas Si e Dó eram próximas uma da outra) e decidiu-se criar uma escala mais abrangente em que todas as notas deveriam ter a mesma distância uma das outras. Para essa distância foi definida o valor do intervalo entre o Dó e o Si (um semitom). Este feito resultou numa escala temperada de 12 notas que foi melhorada por J. S. Bach.

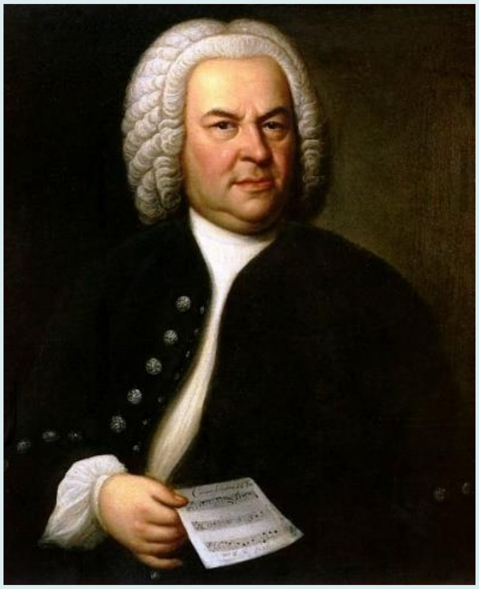

Fig. 1 - Johann Sebastian Bach
(Fonte:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Ao contrário de Pitágoras que formou a escala diatónica pitagórica obtendo 7 notas através de uma divisão que pode ser representada por frações, esta nova escala temperada pode ser explicada através do uso de logaritmos, conceito introduzido por John Napier (1550-1617) e que resultou em 12 notas: Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-Lá e Si.

Nota	Semitom	Escala Pitagórica	Escala temperada de 12 notas	Consonância
Dó	**0**	**1**	**1**	**1**
Dó#	**1**		$2^{1/12}$	
Ré	**2**	$^{9}/_{8}$	$2^{2/12}$	
Ré#	**3**		$2^{3/12}$	$^{6}/_{5}$
Mi	**4**	$^{81}/_{64}$	$2^{4/12}$	$^{5}/_{4}$
Fá	**5**	$^{4}/_{3}$	$2^{5/12}$	$^{4}/_{3}$
Fá#	**6**		$2^{6/12}$	
Sol	**7**	$^{3}/_{2}$	$2^{7/12}$	$^{3}/_{2}$
Sol#	**8**		$2^{8/12}$	
Lá	**9**	$^{27}/_{16}$	$2^{9/12}$	$^{5}/_{3}$
Lá#	**10**		$2^{10/12}$	
Si	**11**	$^{243}/_{128}$	$2^{11/12}$	
Dó (oitava)	**12**	**2**	**2**	**2**

Tabela 1 – Divisão da oitava numa escala temperada de 12 notas

Noutras palavras, as 12 notas da escala temperada (ou escala cromática) correspondem aos logaritmos de base 2: $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{2^{\frac{1}{12}}}$, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$, …, $\mathbf{2^{\frac{2}{12}}}$ e $\mathbf{2}$.

Tais correspondências implicam cordas de diferentes tamanhos nos instrumentos musicais. Coincidentemente, os pianos que têm a caixa de ressonância de acordo com o tamanho das cordas resultam numa forma que se assemelha a uma função logarítmica.

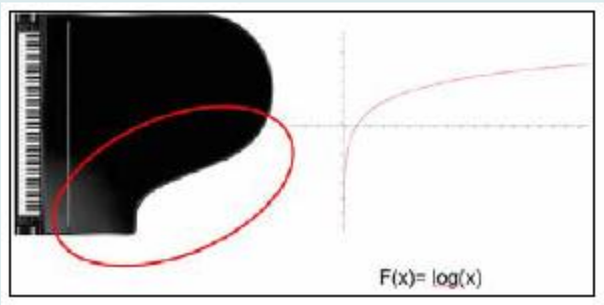

Fig. 2 – Piano e a função logarítmica
(Fonte: RBECM, Passo Fundo, v. 1, n. 2, jul./dez. 2018)

O apoio da Comissão Europeia à produção desta unidade não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Glossário

Escala Musical: Sequência ordenada de tons pela frequência vibratória de sons (normalmente do som de frequência mais baixa para o de frequência mais alta)

Escala Temperada: divisão da oitava em doze semitons iguais

Frequência: grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento, num determinado intervalo de tempo

Frequência Fundamental: a mais baixa e mais forte frequência componente da série harmónica de um som

Harmónico: som de uma série que constitui uma nota

Monocórdio: antigo instrumento musical, composto por uma caixa-de-ressonância, sobre a qual era estendida uma única corda presa por dois cavaletes móveis

Nota Fundamental: nota principal de um acorde

Oitava: intervalo entre notas com a metade ou o dobro da sua frequência

Série Harmónica: conjunto de ondas composto da frequência fundamental e de todos os múltiplos inteiros desta frequência

Semitom: intervalo que é a metade de um tom e que constitui a distância mínima no sistema musical ocidental tradicional

"#": símbolo denominado sustenido e que indica a elevação de um semitom na nota

A Matemática por trás da Escala Temperada: logaritmos

Como vimos anteriormente a escala cromática ou temperada foi dividida em 12 partes usando os logaritmos. Assim, vejamos o gráfico da figura 3 conhecer o aspeto de uma curva logarítmica:

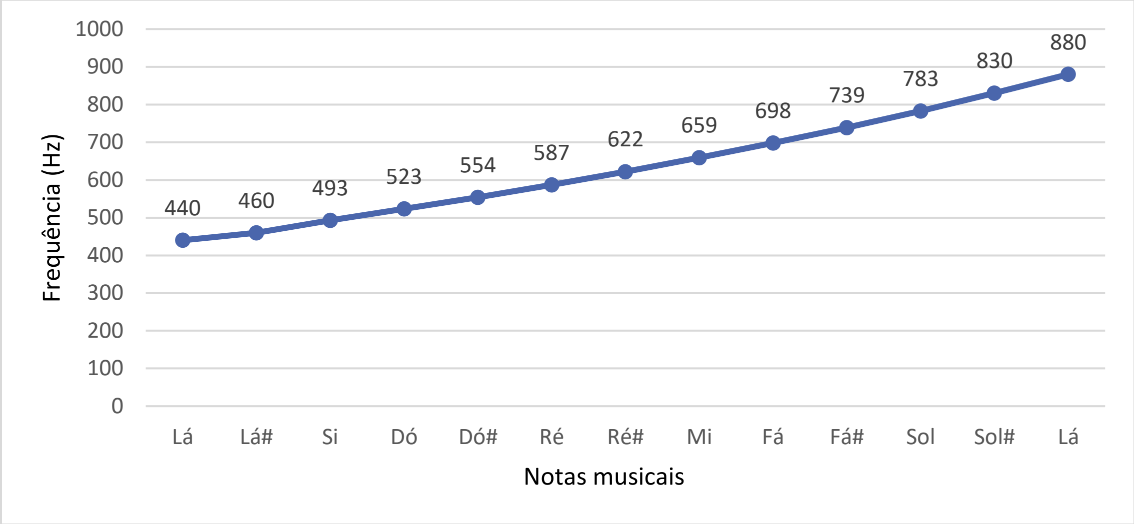

Fig. 3 – Frequências da escala temperada
(Fonte: Autor; Obs: Valores de frequência (Hz) da curva logarítmica arredondados para efeitos de simplificação)

Para percebermos mais um pouco sobre logaritmos vamos então debruçar-nos sobre o conceito de logaritmo e as suas propriedades.

Função logarítmica de base *a*. Logaritmo de um número

Qual o número a que é necessário elevar 2 para se obter 8?

A resposta é 3, pois $\mathbf{2^3 = 8}$.

Diz-se, então, que "3 é o logaritmo de 8 na base 2" e escreve-se: $\mathbf{\log_2 8 = 3}$.

> Chama-se logaritmo de um número positivo $\boldsymbol{x}$ na base $\mathbf{a}$, com $\mathbf{a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}}$, ao número $\boldsymbol{y}$, tal que: $\boldsymbol{a^y = x}$ e representa-se por $\boldsymbol{\log_a x}$, ou seja,
> $$\boldsymbol{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Por conseguinte, atendendo a que $\boldsymbol{a^1 = a}$ e $\boldsymbol{a^0 = 1}$, então: $\boxed{\log_a a = 1}$ e $\boxed{\log_a 1 = 0}$

E ainda que: $\boxed{\log_a a^x = x}$ e $\boxed{a^{\log_a x} = x}$

O apoio da Comissão Europeia à produção desta unidade não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Logaritmo de base 10 e logaritmo de base $\mathbf{e}$.

No cálculo com logaritmos há dois que se usam com maior frequência: os que têm base 10 e os que têm base $\boldsymbol{e}$.

No caso do **logaritmo de base 10**, conhecido como "logaritmo decimal" ou "logaritmo comum", a base pode ser suprimida. Assim, a escrita a usar pode ser $\boldsymbol{log\ x}$ em vez de $\mathbf{log_{10}}\,\boldsymbol{x}$.

O mesmo acontece no caso do **logaritmo de base $\boldsymbol{e}$**, vulgo "logaritmo neperiano" ou "logaritmo natural", que pode simplesmente ser representado por $\boldsymbol{ln\ x}$ em vez de $\mathbf{log}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{x}$.

Para calcular logaritmos utilizando a calculadora, utilize os botões "LOG e "LN".

Mais especificamente, para verificar que:

- $\mathbf{10^2 = 100}$, utilize o botão "LOG", usado para calcular logaritmos de base 10;
- $\mathbf{e^{4,605} \cong 100}$, utilize o botão "LN", usado para calcular logaritmos de base $\mathbf{e}$.

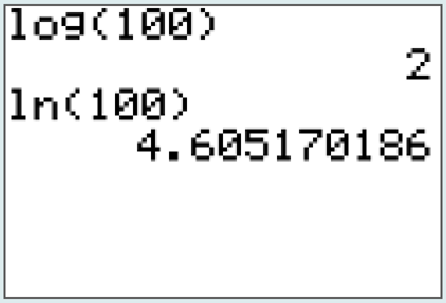

Fig. 4 – Cálculo de logaritmos
(Fonte: Calculadora científica Texas Ti-84 Plus)

Função logarítmica

Chama-se função logarítmica de base $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ à função

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x}$$

Os gráficos das funções $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x}$ são simétricos relativamente à reta de equação $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Diz-se que as funções $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ são inversas uma da outra.

Estas funções têm, para $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$, e tem uma representação gráfica que pode ser vista na figure 5.

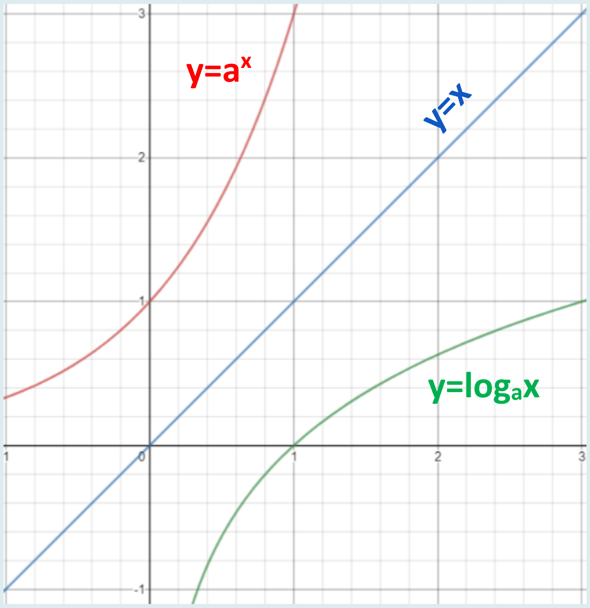

Fig. 5 – Gráficos das funções a^x e $\log_a x$
(Fonte: Author, Desmos.com)

Propriedades das funções logarítmicas

As propriedades das funções logarítmicas estão relacionadas com as propriedades das respetivas funções inversas (as funções exponenciais).

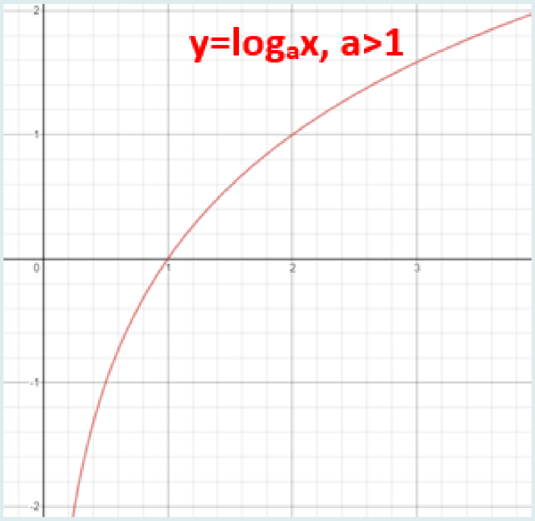

Fig. 6 – Gráfico da função $y=\log_a x$
(Fonte: Autor, Desmos.com)

Seja $\begin{array}{l} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x} \end{array}$, com $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ o seu gráfico tem o aspeto apresentado na figura 6 e as propriedades da função $\boldsymbol{f}$ serão:

- $\mathbf{f}$ é contínua
- Domínio: $D = \mathbb{R}^+$
- Contradomínio: $D' = \mathbb{R}$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, ou seja, $f(1) = 0$
- f é estritamente crescente
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, ou seja, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f

Regras operatórias de logaritmos

As regras operatórias de logaritmos estão relacionadas com as regras operatórias das potências. Algumas regras operatórias de logaritmos são:

Considere $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{+}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{+}$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{+} \setminus \{\mathbf{1}\}$.

1. Logaritmo de um produto

O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{xy}) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y})$$

2. Logaritmo de um quociente

O logaritmo de um quociente é igual à diferença entre os logaritmos dos seus termos:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y})$$

3. Logaritmo de uma potência

O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base:

Casos particulares:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) = -\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$$ porque $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{-\mathbf{1}}$

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{x}}) = \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{n}}$$ porque $\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}}$

4. Mudança de base

O logaritmo de um número numa dada base $\boldsymbol{a}$ é igual ao quociente entre o logaritmo desse número, numa dada base $\boldsymbol{b}$ e o logaritmo de $\boldsymbol{a}$, nessa mesma base $\boldsymbol{b}$:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})}\ ,\quad \text{com } \boldsymbol{a} \text{ e } \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{+} \setminus \{\mathbf{1}\}$$

Esta regra torna-se imprescindível quando pretendemos calcular, recorrendo à calculadora, o logaritmo de um número em que a base é diferente de 10 ou $\boldsymbol{e}$.

Por exemplo: $\mathbf{log}_{\mathbf{3}}\,\mathbf{5} = \frac{\mathbf{ln}\,\mathbf{5}}{\mathbf{ln}\,\mathbf{3}} \simeq \mathbf{1,46}$ ou $\mathbf{log}_{\mathbf{3}}\,\mathbf{5} = \frac{\mathbf{log}\,\mathbf{5}}{\mathbf{log}\,\mathbf{3}} \simeq \mathbf{1,46}$

Erasmus+

TheArtOf Maths

TAREFAS

TAREFA 1

Calcule o valor de:

1.1. $\log_2 64$

1.2. $\log_5 5$

1.3. $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$

1.4. $\log_4 1$

1.5. $\log_{\frac{1}{4}} 2$

1.6. $\log_{\sqrt{5}} 125$

1.7. $\log_{10} 1000$

1.8. $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$

1.9. $\log_2 \sqrt{2}$

1.10. $\log_e \sqrt[3]{e^4}$

1.11. $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

1.12. $\log_5 0,2$

1.13. $\log_e(e^{-2}) + \log_2\left(\frac{1}{32}\right)$

TAREFA 2

Calcule o valor de:

2.1. $\log 10000$;

2.2. $\log 0,01$;

2.3. $\ln e^{-7}$;

2.4. $\ln\left(\sqrt[5]{e}\right) - \ln(e) + \ln(e^{-3})$;

2.5. $\log(10) + \log(1) - \ln(e^2)$;

2.6. $\ln(e^{-1}) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) + \log\left(\sqrt{10}\right)$

TAREFA 3

Calcule, utilizando as propriedades dos logaritmos, e confirme com a calculadora:

3.1. $\log_2(64 \times 16)$;

3.2. $\log_3(81:27)$;

3.3. $\log_2(32^8)$.

TAREFA 4

Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Determine o valor de: $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Escala cromática

https://www.youtube.com/watch?v=IbgOcXar9UA

Escala Logarítmica

https://www.youtube.com/watch?v=jhziJ1yd9j4

Logaritmo e funções logarítmicas

https://www.khanacademy.org/math/algebra2/exponential-and-logarithmic-functions

https://www.youtube.com/watch?v=N-7tcTIrers

Explore os gráficos das funções logarítmicas através da aplicação Desmos:

https://www.desmos.com/