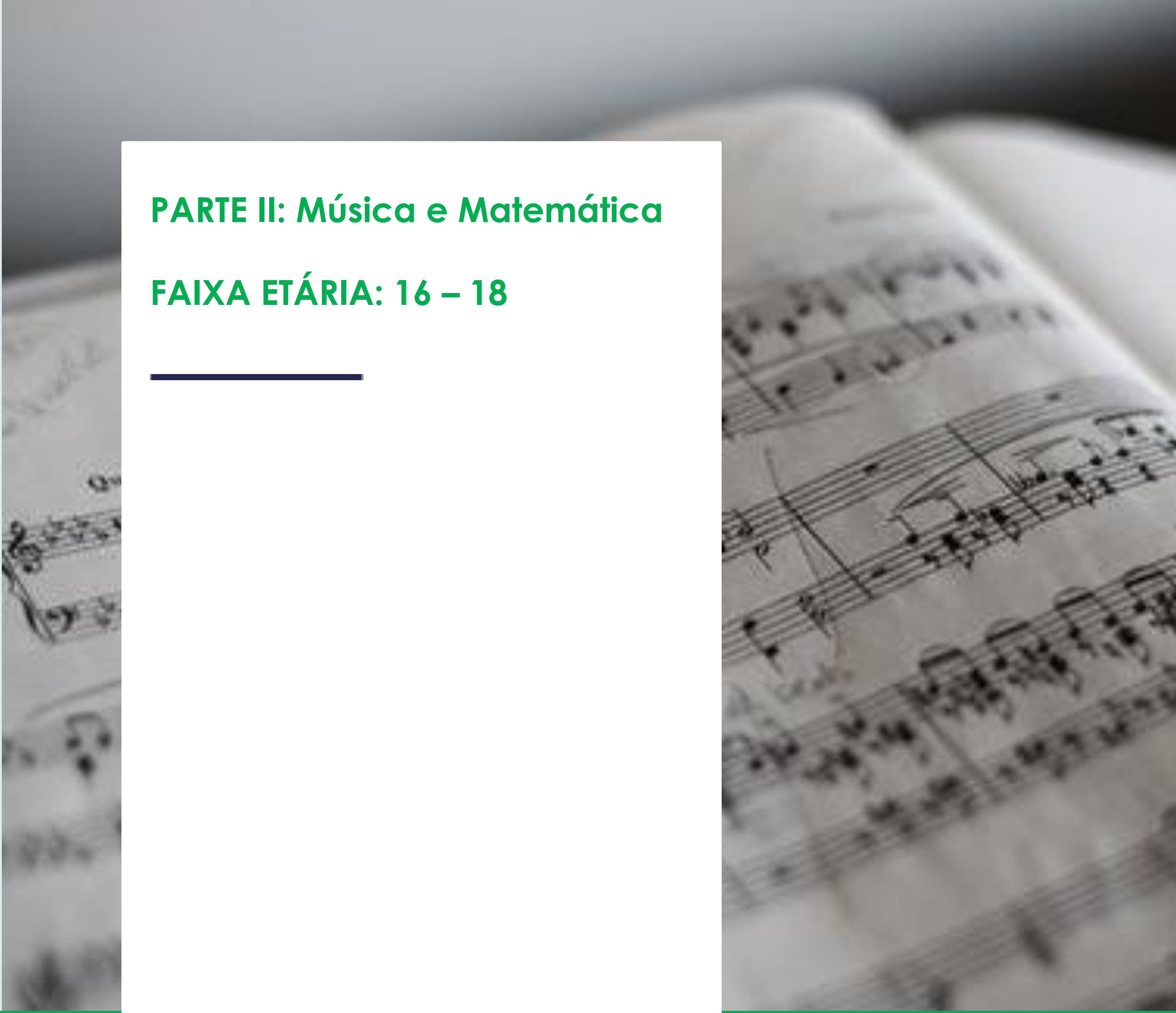


PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

UNIDADE 22: MÚSICA E FIBONACCI

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: Música e Fibonacci

Faixa Etária: 16 –18 anos

Duração: 2 horas

Conceitos Matemáticos: Número de Ouro, Proporção de Ouro, Sequência de Fibonacci

Conceitos Artísticos: Música da Grécia Antiga, Musas, Harmonia

Objetivos Gerais: descobrir os conceitos matemáticos escondidos em composições musicais e perceber o processo lógico que está por detrás deste.

Instruções e Metodologias: os alunos irão explorar ambos os campos como um só, ouvindo ou tocando música e vendo os vídeos sugeridos que analisam composições musicais. Irão descobrir as bases dos conceitos matemáticos mencionados.

Recursos: o módulo fornece vídeos e recursos online para serem usados na sala de aula. Os tópicos abordados serão a inspiração para procurar outros materiais, que irão personalizar e dar nuances às suas aulas.

Dicas para o professor: aprender executando é muito eficiente, especialmente com alunos mais jovens e com dificuldades na aprendizagem. O professor deve encorajar os alunos a experimentar instrumentos musicais, se possível.

Objetivos de aprendizagem e competências: No final deste módulo, os alunos serão capazes de:

- Compreender o processo lógico por trás das composições musicais;
- Compreender a utilização da Razão de Ouro e da Sequência de Fibonacci na música;
- Calcular o n^{th} termo de uma Sequência Fibonacci.

Síntese e avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado nesta atividade	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar	1.

Introdução

A música e a matemática não apresentam uma conexão óbvia para aqueles que nunca compuseram ou leram uma pauta musical. No entanto, parece ser claro que o tempo das composições musicais e a estruturação das pautas, por medidas, recorre a um pensamento matemático.

Muitos estudiosos analisaram as implicações da matemática nas artes. A música foi um dos pontos focados nos seus estudos e descobriram que, no decorrer da História, muitos matemáticos exploraram essa questão. Pitágoras, Leonardo Bonacci e muitos outros contribuíram para esta pesquisa. Aspetos diferentes da matemática, desde a geometria básica e sequências numéricas até à trigonometria, demonstraram ser usados nas composições matemáticas.

Nesta unidade, iremos colocar o foco na aplicação da matemática nas composições musicais. Para isso, investigaremos o Número de Ouro e a Sequência de Fibonacci e exploraremos as opções que estas oferecem para a composição de músicas.

As divinas proporções na música

Na Grécia Antiga, o povo era adepto das artes criativas, nas quais a música tinha um papel muito importante, dado que muitas das vezes acompanhava outras obras criativas tal como o teatro ou a poesia. Eles acreditavam que cada artista tinha sido inspirado por uma musa.

Veja este TED-Ed vídeo que explica este fenómeno com mais detalhe: https://www.youtube.com/watch?v=-1aAunaw1GA.

O papel central que a música tinha na sociedade não era só inspirado pelas musas. Os gregos tinham, também, descoberto uma proporção perfeita chamada: "Razão de Ouro" ou "Proporção". Esta proporção está intimamente ligada à Sequência de Fibonacci que iremos aprender mais tarde. Provavelmente, já as viu mais do que uma vez, mesmo sem se ter apercebido. Consegue encontra-las na arquitetura Antiga, tal como na natureza e na pintura. O que a maior parte das pessoas não sabe é que também se pode ouvir o Número de Ouro ou a sequência de Fibonacci.

Aqui estão dois exemplos onde as pode ver:

- Os girassóis contem a Sequência de Fibonacci;
- O templo Grego tem a proporção divina do Retângulo de Ouro.

Fig. 1 – Girassois e Templo Grego (Fonte: https://www.telitec.com/2019/05/27/golden-ratio/)

Pode aprender mais sobre como a Sequência de Fibonacci é representada na natureza: https://www.youtube.com/watch?v=_GkxCIW46to.

A Sequência de Fibonacci é baseada nas proporções perfeitas do Número de Ouro, que serve de grande inspiração a músicos para a experimentarem nas suas composições. Irá encontrar várias interpretações de como a Razão de Ouro e a Sequência de Fibonacci podem ser usadas em composições musicais. Alguns decidem tocar um número de notas correspondente aos números de Fibonacci, outros atribuem esses números ás teclas do piano,...
Pode ver os seguintes vídeos para ouvir ao que soa a música quando acoplada à Sequência de Fibonacci e ao Número de Ouro.

Neste vídeo o músico usa o Número de Ouro: https://www.youtube.com/watch?v=W_Ob-X6DMI4.

Os músicos neste vídeo tentam compor usando a Sequência de Fibonacci e a Razão de Ouro: https://www.youtube.com/watch?v=9mozmHgg9Sk

Glossário

Artes Gregas Criativas: na sociedade da Grécia Antiga as artes criativas eram a história, a comédia, a poesia, a música, os hinos, a poesia épica, a dança, a astronomia, a tragédia. Acreditava-se cada arte era inspirada numa musa.

Musa: na Grécia Antiga as Musas eram as Deusas que inspiravam a criatividade humana. Hoje em dia, usamos esta palavra para referir qualquer pessoa, humana ou divina, que sirva de inspiração ao artista no seu trabalho.

Harmonia: um agradável som feito pelas notas diferentes sendo tocadas ou cantadas ao mesmo tempo[1].

Leonardo Bonacci ou Fibonacci: foi um matemático italiano nascido no século XII. É principalmente conhecido pelas suas sequências de números, nas quais descobriu muitos aspetos das artes criativas.

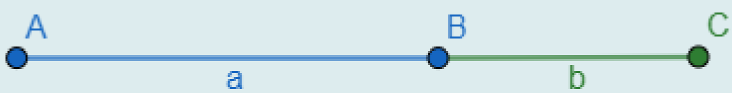
[1] https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/harmony

A Matemática por trás das composições musicais

O Número de Ouro

O Número de Ouro é um número bastante único em matemática. É aproximadamente 1,618 e é comummente usado na arte, na música, na arquitetura, etc.
Usamos a letra Grega **φ (phi)** para o referir.

O Número de Ouro é o uso que fazemos deste número em várias disciplinas diferentes.
Imagine que cortamos uma linha em **duas** partes diferentes a e b. Quando usamos a razão de ouro, a **totalidade do comprimento** dividido pela **maior parte** é igual à parte maior dividia pela **mais parte menor**.

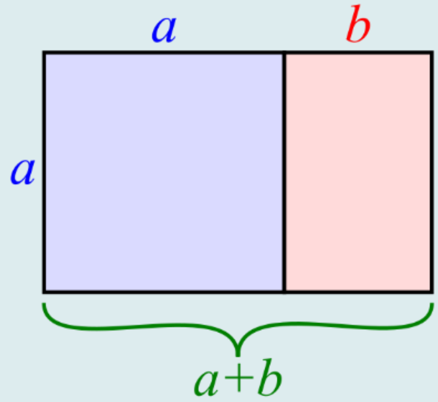


Para simplificar, lembre esta formula:

$$\varphi = \frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{1{,}618}$$

A Razão de Ouro pode, assim, ser aplicada a um retângulo, chamado o **Retângulo de Ouro**. Como foi considerada a forma mais perfeita da Antiguidade, muitos artistas e arquitetos usaram-na no seu trabalho.
Tal como fizemos com a **linha ab**, vamos dividir o **retângulo AB** em duas partes diferentes: um **quadrado A** e um **retângulo B** de modo a que todos os lados do quadrado e os lados maiores do retângulo tenham comprimento **a** e os lados pequenos do retângulo tenham comprimento **b**.

Para termos o retângulo perfeito, iremos usar a mesma formula. Imagine, por exemplo, que o quadrado A é 2cm x 2cm. Se quisermos descobrir o lado b:

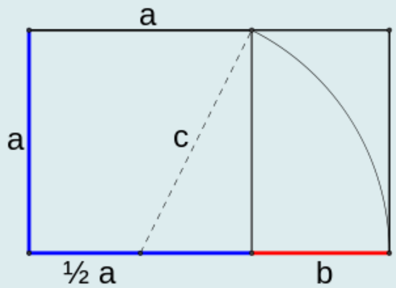


- Sabemos que $\frac{a}{b} = 1{,}618$
- Também sabemos que a = 2
- Podemos dizer que $\frac{2}{b} = 1{,}618$
- E que 2 = b x 1,618
- Se isolarmos b, temos: b = $\frac{2}{1{,}618}$
- Então, b = 1,236

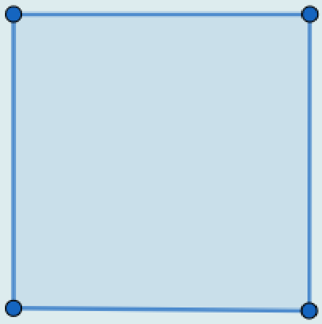
Vamos verificar estes resultados usando ambas as formulas:

- $\frac{2 + 1{,}236}{2} = 1.618$
- $\frac{2}{1.236} = 1{,}618$

Podemos também usar o compasso e a régua para desenhar um retângulo perfeito:



1. Coloque a agulha do compasso no meio da parte do lado inferior.
2. Abre o compasso de forma a tocar no ângulo oposto.
3. Desenhe a curva desde a prolongação do lado inferior até ao ângulo oposto.
4. Desenhe o retângulo B desde o começo da curva até à prolongação dos lados superior e inferior do quadrado A.



A Sequência de Fibonacci

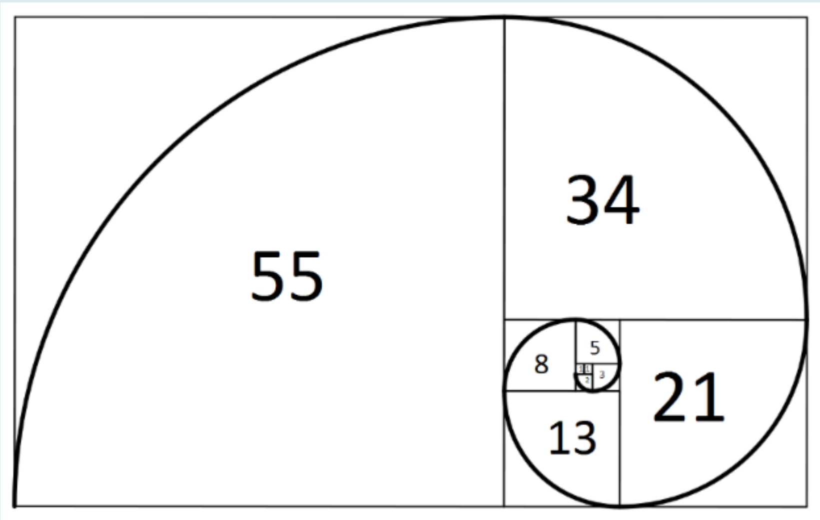
A sequência de Fibonacci é uma série de números onde o número seguinte é descoberto somando os dois últimos números.
0+1=1→ 1+1=2 → 1+2=3 → 2+3=5 → 3+5=8 → 5+8=13 ...

A Razão de Ouro é muitas vezes associada à Sequência de Fibonacci.

Quais são os próximos 3 números?

__8+13=21____________________________________
__13+21=34___________________________________
__21+34=55___________________________________

Quando fazemos quadrados com essas larguras obtemos uma boa espiral:



[2]

Repare que se somarmos os lados dos quadrados 5 e 8, obteremos 13. Observe também que a proporção nos retângulos formados se torna muito próxima de phi.

[2] **Retirado de: https://codegolf.stackexchange.com/questions/53369/fibonacci-spiral**

No retângulo formado pelos quadrados 21 e 13:

a = 21

b = 13

Aplicando a formula:

$\frac{a}{b}$ =1,615

Vendo no próximo retângulo dourado formado pelos quadrados 34 e 21:

a = 34

b = 21

$\frac{a}{b}$ =1,619

Os resultados não são exatamente o número de ouro, mas são muito próximos. O que permite demonstrar a forma como a sequência de Fibonacci se emparelha com o Número de Ouro.

A sequência pode ser escrita em notação matemática, observando o seguinte:

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n =	0	1	1	2	3	5	8	13	21

O termo 7 é chamado de n_7 =13

Pode recordar a regra:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

Onde:

x_n é o termo número "n"

x_{n-1} é o termo prévio (n-1)

x_{n-2} é o termo antes desse (n-2)

Como a Sequência de Fibonacci é muito próxima do Número de Ouro, podemos usar o phi para encontrar qualquer número da sequência com a formula seguinte:

$$x_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

Se olharmos para os números da sequência, podemos identificar um padrão interessante:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Reparamos que:

- x_3 = 2 e que todo o terceiro número é múltiplo de dois (2; 8; 34; 144; 610)
- x_4 = 3 e todo o quarto número é múltiplo de três (3; 21; 144)
- x_5 =5 e todo o quinto número é múltiplo de cinco (5; 55; 610)

Observemos as razões (R) entre os números:

R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8
1	1	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619

Percebemos que as **proporções ímpares** (R1, R3, R5, R7) são sempre **mais baixas** do que o número de ouro, enquanto as **proporções pares** (R2, R4, R6, R8) são sempre **mais altas.**

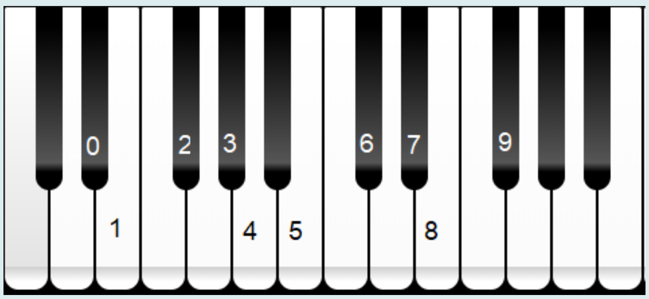
TAREFA

Esta tarefa irá permitir que use a matemática que aprendeu sobre a Razão de Ouro e sobre Fibonacci na composição musical.

Vamos tocar!

Vamos descobrir os números que teremos de tocar no piano para usar a Sequência de Fibonacci.

Lembre: neste caso os números 0 a 9 estão alocados como tal no teclado.



Irá usar este teclado online: https://virtualpiano.net/

Ou faça o download de uma app de um piano virtual na Play Store ou Apple Store.

1. Preencha a seguinte tabela com os números que terá de tocar no teclado.

X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}

Use a fórmula $X_n = \frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ para encontrar os números que faltam:

Pode, agora, tocar esses algarismos individualmente no teclado para ouvir a Sucessão de Fibonacci.

Peça musical usando a Sequência de Fibonacci

Esta experiência musical de aSongScout demonstra como usar a Sequência de Fibonacci numa composição musical:

https://www.youtube.com/watch?v=IGJeGOw8TzQ

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS:

Vídeo sobre o uso de Fibonacci e de o Número de Ouro em composições musicais:
https://www.youtube.com/watch?v=9mozmHgg9Sk

Aprender como Fibonacci e o Número de Ouro estão representados na natureza:
https://www.youtube.com/watch?v=_GkxCIW46to

Como compor uma música com a Sequência de Fibonacci e com o Número de Ouro:
http://www.faena.com/aleph/articles/how-to-compose-a-song-with-the-golden-ratio-and-the-fibonacci-sequence/

Conselhos sobre como usar Fibonacci em composições musicais:
https://www.classicfm.com/discover-music/fibonacci-sequence-in-music/

Artigo no estudo matemático da música:
http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS_ep2010_103.pdf

Artigo sobre composições musicais com a sequência de Fibonacci:
http://ww.nntdm.net/papers/nntdm-20/NNTDM-20-1-72-77.pdf

TED Talk sobre como a Sequência de Fibonacci está à nossa volta:
https://www.youtube.com/watch?v=0vVxL60YFJU