PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

UNIDADE 20: A EQUAÇÃO DA BATIDA

LogoPsyCom

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: A equação da batida

Faixa Etária: 16 -18 anos

Duração: 1 hora

Conceitos Matemáticos: Teoria dos batimentos, identidades trigonométricas, ondas sinusoidais

Conceitos Artísticos: Frequência, afinação, ondas sonoras

Objetivos Gerais: descobrir os conceitos matemáticos ocultos nas composições musicais e adquirir uma visão mais prática do uso da matemática.

Instruções e Metodologias: os alunos explorarão os dois campos como um todo, ouvindo ou tocando a música e assistindo aos vídeos sugeridos que analisam as composições musicais. Eles descobrirão a base dos conceitos matemáticos mencionados.

Recursos: a unidade fornece recursos online para usar na sala de aula. Os tópicos abordados na ferramenta ajudarão a encontrar outros materiais para personalizar e dar nuances à aula.

Dicas para o professor: aprender fazendo é muito eficiente, especialmente com alunos mais jovens e com dificuldades na aprendizagem. O professor deve explicar, sempre, a utilidade prática de cada conceito de matemática e criar uma experiência prática para os mesmos.

Objetivos de aprendizagem e competências: no final desta unidade, os alunos serão capazes de:

- Compreender o processo lógico por trás da composição musical;
- Entender identidades trigonométricas;
- Entender e usar a equação de batida.

Discussão e avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado nesta atividade	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar	1.

Introdução

A música e a matemática não mostram uma conexão óbvia para quem nunca compôs ou leu uma partitura. No entanto, parece claro que os tempos das composições musicais e a estruturação da folha por medidas lembram uma maneira matemática de pensar.

Muitos estudiosos estudaram a implicação da matemática nas artes. A música foi um dos focos dos seus estudos e verificou-se que, ao longo da história, muitos matemáticos exploraram essa questão. Pitágoras, Leonardo Bonacci e muitos outros contribuíram para a pesquisa. Diferentes aspetos da matemática, desde a geometria básica, as sequências numéricas e até trigonometria, demonstraram ser usados em composições musicais.

Dentro desta unidade, focar-se-á a aplicabilidade da matemática em composições musicais, investigando primeiro o sistema de afinação de Pitágoras e explorando as opções que ele oferece para a composição musical.

Como funciona o fenómeno da música?

Quando tocamos música, a vibração produzida e o movimento das partículas de ar passam pelos nossos ouvidos e permite-nos ouvir os sons na frequência certa. Se você olhar para uma corda de guitarra, poderá vê-la a mover-se de uma certa maneira e num certo ritmo. Quando esticamos uma corda, o seu tom fica mais alto e a sua frequência mais rápida. O que é produzido é chamado de onda sonora e entra diretamente nos nossos ouvidos, movendo o fluido da nossa cóclea, na parte interna do nosso ouvido.

É claro que Pitágoras, um filósofo grego de cerca de 570 – aC a 495 aC, não estava ciente de tudo o que sabemos hoje sobre o corpo humano e a composição musical. No entanto, ele desenvolveu uma teoria sobre como calcular as proporções em intervalos, que aprenderá nesta aula. A lenda diz que ele ouviu sons diferentes vindos de martelos na oficina do ferreiro e descobriu que quando um martelo era duas vezes maior ou mais pesado que outro, produzia a mesma nota uma oitava mais alta.

Glossário

Frequência: fornece a velocidade de uma vibração e o tom de um som.

Tom: se uma nota soa alta ou baixa e é medida em Hertz.

Onda sonora: representa a vibração produzida por um som. O seu comprimento e velocidade determinam o tom ou a frequência do som.

Cóclea: é a cavidade espiral situada no ouvido interno que reage às vibrações sonoras.

Intervalo: é a diferença de afinação entre dois sons.

Oitava: é a diferença de tom entre uma nota e outra que tem o dobro de sua frequência

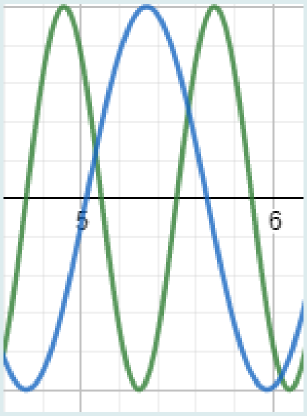
A Matemática por trás das Composições Musicais

A Equação da Batida

Você aprendeu que a frequência de um som está intimamente ligada às ondas sonoras que podemos desenhar para representar visualmente os sons. Há outro fenômeno chamado "a batida", produzido pelas interferências entre as duas ondas sonoras tocadas ao mesmo tempo. Se tiver duas ondas sonoras que se sobrepõem, observará fenômenos diferentes.

• Se as duas ondas sonoras forem **construtivas**, o que significa que elas estão perfeitamente sobrepostas, o som que ouvirá no momento exato será mais alto.

• Se as ondas sonoras forem **destrutivas**, o que significa que seus picos serão opostos um ao outro, o som que ouvirá será **mais suave**.



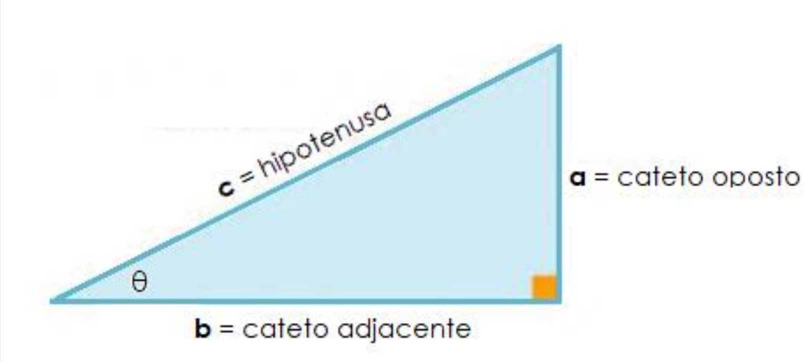
• Se ambas as ondas são constantes, ouvirá uma batida regular, se ouvir as duas ao mesmo tempo.

Assista a este vídeo do SMUPhysics, onde poderá a que se assemelha: https://www.youtube.com/watch?v=V8W4Djz6jnY.

Identidades trigonométricas

As ondas sonoras podem ser representadas graficamente com funções sinusoidais. Para fazer isso, precisa aprender sobre identidades trigonométricas. Comecemos com triângulos, uma vez que já conhece o teorema de Pitágoras.

Aqui está um triângulo retângulo com um ângulo θ:



As funções trigonométricas neste triângulo:

- $\sin(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
- $\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
- $\tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$

Usemos o Teorema de Pitágoras para calcular a Hipotenusa: $\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} = \boldsymbol{c^2}$. Esta fórmula pode ser simplificada dividindo tudo por $\boldsymbol{c^2}$.

- $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$
- $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

Usando as funções trigonométricas, podemos deduzir que:

- $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$
- $cos^2(\theta) = 1 - sin^2(\theta)$
- $sin^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta)$

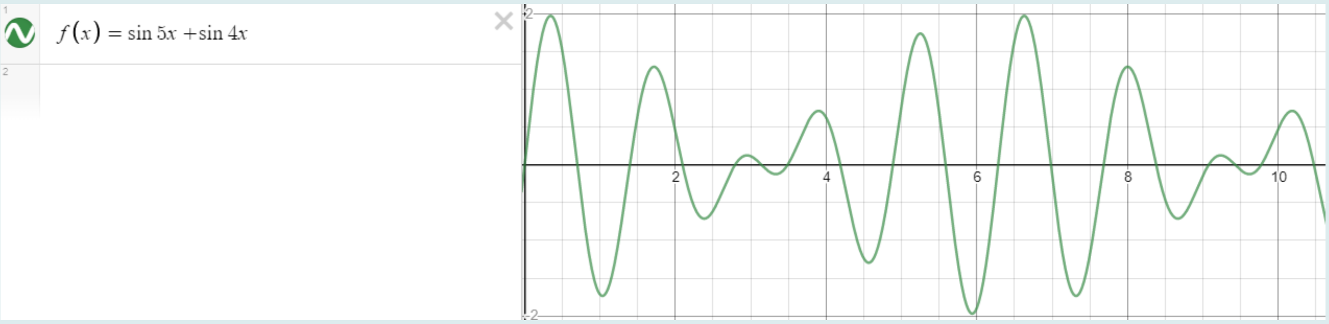
Esta é uma das identidades trigonométricas que precisa lembrar!

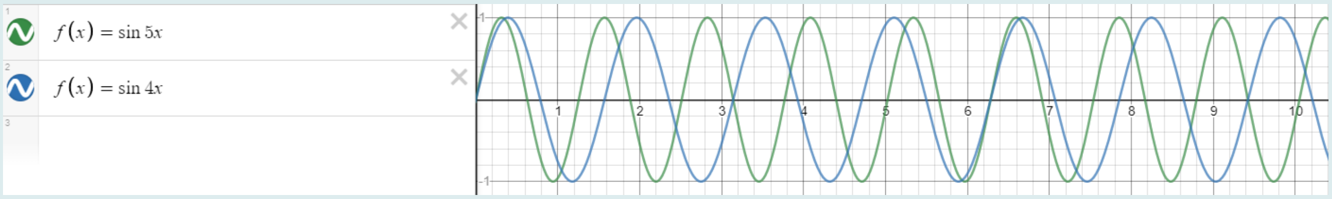
As identidades trigonométricas são complexas e existem várias fórmulas que foram demonstradas, como a seguinte, usada para representar a frequência de batida:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) * \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Vamos começar com um exemplo fácil.

Se decidirmos que $a = 5x$ e $b = 4x$, eis como aparece se usarmos uma calculadora gráfica:





Aqui está o que vemos:

- Existe um ciclo constante
- Quando dois picos se aproximam, o som torna-se mais alto
- Quando um *topo* e um *vale* se opõem, o som aproxima-se de 0

Vamos ver isso com uma nota musical. A nota A ou La tem uma frequência de 440 Hz. A sua equação trigonométrica é:

$$\sin(440 * 2\pi * x)$$

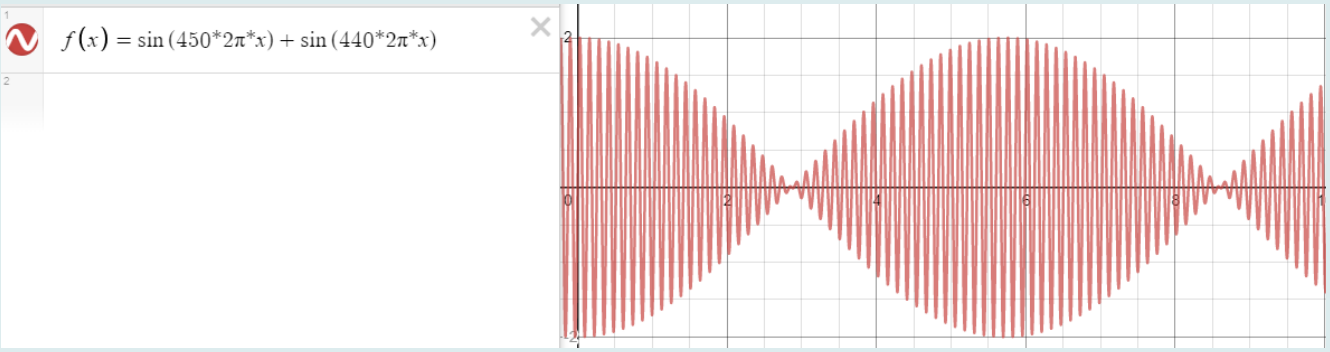
Então temos:

- **a** como $(450 * 2\pi * x)$ para ter outra nota próxima a A / La
- **b** como $(440 * 2\pi * x)$

Vamos aplicar a equação de batida:

- $\sin(450 * 2\pi * x) + \sin(440 * 2\pi * x) = 2\sin(445 * 2\pi) + \cos(5x * 2\pi)$

Aqui está como fica quando os reúne usando uma calculadora gráfica:



Você pode ver que, quando reunidas, as ondas que aparecem na unidade mostram uma batida como a que foi ouvida ao fazer a experiência com dois diapasões.

TAREFA

Experimente!

Aqui está uma tabela com as diferentes frequências de algumas notas musicais:

C	D	E	F	G	A	B
261.63 Hz	293.66 Hz	329.63 Hz	349.23	392 Hz	440 Hz	493.88

TAREFA 1: D e C

- Qual é a equação do ritmo se tocarmos D e C juntos?
- Faça um *print screen* do gráfico no Desmos ou no GeoGebra:

TAREFA 2: A e G

- Qual é a equação do ritmo se tocarmos A e G juntos?
- Faça um *print screen* do gráfico no Desmos ou no GeoGebra:

Para ainda mais diversão, use dois diapasões na sala de aula para comparar os sons!

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Vídeo Ted-ED sobre os padrões musicais:

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

Vídeo sobre a origem do som:

https://www.youtube.com/watch?v=i_0DXxNeaQ0

Vídeo sobre como a matemática é usada na música:

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Uma lição sobre a frequência de batida:

https://www.youtube.com/watch?v=Ca91iOVGd9A

Vídeo sobre a física por trás da frequência de batida:

https://www.youtube.com/watch?v=IQ1q8XvOW6g

Explicação sobre a ligação entre trigonometria e música:

http://www.math.bgsu.edu/~zirbel/sound/Trigonometric%20functions%20and%20sound.pdf