PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

UNIDADE 19: RAZÕES DE FREQUÊNCIAS DE NOTAS MUSICAIS

C.I.P. Citizens In Power

TheArtOf Maths

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guia do Professor

Título: Razões de frequências de notas musicais

Faixa Etária: 13 –15 anos

Duração: 2 horas

Conceitos matemáticos: intervalos, frequências, razões, logaritmos

Conceitos artísticos: matemática por trás de notas musicais.

Objetivos gerais: mostrar que adicionar intervalos é igual a multiplicar frequências.

Instruções e metodologias: a unidade é baseada numa introdução geral sobre a relação entre a matemática e a música, mas torna-se um pouco mais desafiadora na seção Matemática por trás. Tentou-se torná-la o mais "leve" e compreensível possível por imagens, exemplos, fotos e um vídeo do YouTube.

Dicas para o professor: pode começar com algumas perguntas gerais para atrair o interesse dos alunos sobre: "se" e "como" acreditam que a matemática e música estão relacionadas. Depois, pode ler rapidamente a introdução antes de passar à seção "Matemática por trás da Música".

Recursos: vídeos do Youtube, livros, revistas, imagens e glossário.

Objetivos de aprendizagem e competências: adote um conceito não quantificado de intervalo, calcule um valor numérico real a partir da razão de frequências e use a fórmula para calcular a proporção de um intervalo resultante.

Síntese e avaliação:

Escreva 3 aspetos que tenha gostado desta atividade:	1. 2. 3.
Escreva 2 aspetos que tenha aprendido:	1. 2.
Escreva 1 aspeto que necessite de ser melhorado:	1.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

Introdução

Apesar de muitos estudantes amarem a música e simultaneamente odiarem a matemática, o que eles não sabem é que elas estão relacionadas uma com a outra e, de fato, diz-se que a matemática pode-nos ajudar a explicar a experiência musical. Desde 1998, Grandin, Peterson e Shaw mostraram que a música melhora as capacidades de raciocínio, que são cruciais para aprender conceitos matemáticos, como o raciocínio proporcional e o desenvolvimento de competências geométricas. Rauscher et al. (1997) afirmam que a música promove o desenvolvimento de tais capacidades de pensamento e, especialmente, o reconhecimento de padrões e o uso da lógica.

Pitágoras, um antigo grego, mesmo a partir do século VI aC, percebeu que sons diferentes podem ser feitos com pesos e vibrações diferentes. Isso levou à sua invenção de que o tom de uma corda vibratória é proporcional e pode ser controlado pelo seu comprimento. As cordas que têm metade do comprimento são uma oitava acima do original. Deste modo, quanto menor a corda, maior o tom. Pitágoras também descobriu que as notas de certas frequências soam melhor com frequências múltiplas dessa nota. Por exemplo, uma nota de 220Hz soa melhor com notas de 440Hz, 660Hz e similares. Então pode, já, ver que desde o básico até a síntese mais complicada, a matemática está relacionada com a música.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

Figura 2: Escala diatónica com o conceito de Pitágoras (Retirado de: https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=pAHlvMTRAje)

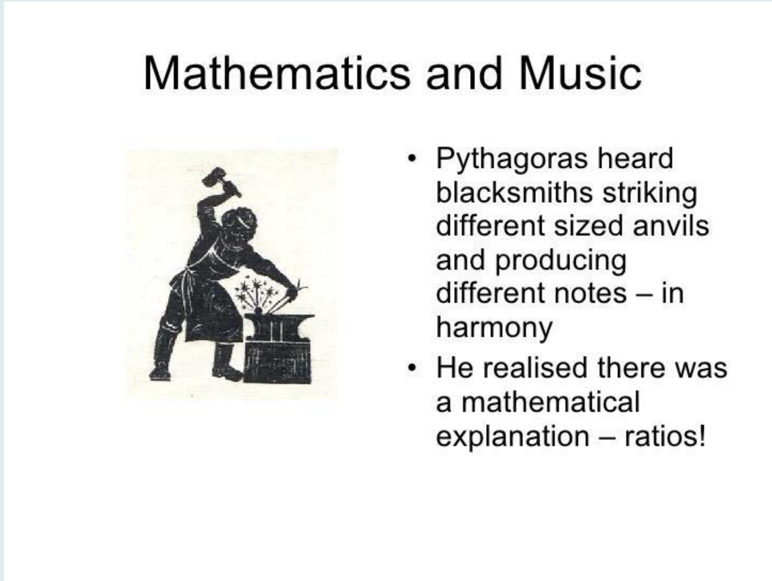
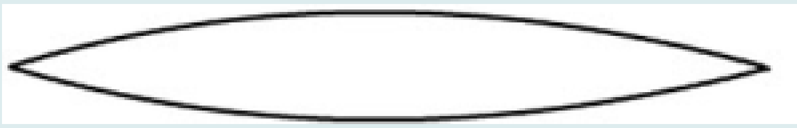


Figura 1: Pitágoras e a Música (Retirado de: *https://www.google.com/search?q=pythagoras+and+music&client=firefox-b-d&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjN9r7B_IPjAhXJCuwKHcEKD6AQ_AUIECgB&biw=1138&bih=527#imgrc=kjndmRILmsTNLM*)

Frequências, intervalos e proporções na música

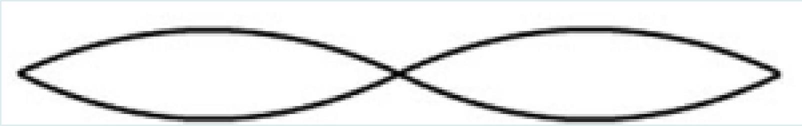
Alguns conceitos matemáticos comuns que se relacionam com a música são as frequências, intervalos e proporções.

Pitágoras fez as suas descobertas "tocando" com uma corda esticada. Abaixo pode ver uma corda esticada amarrada nas suas extremidades. Quando tocada, vibra. Como todos sabemos, quando um instrumento está vibrando, uma onda de pressão que viaja pelo ar chega ao nosso ouvido como um som.



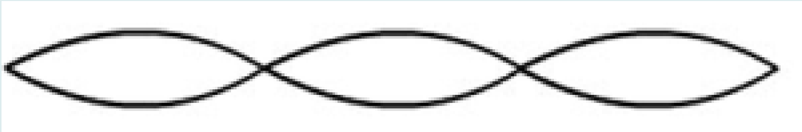
O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

Pitágoras decidiu dividir essa corda em duas partes e tocou cada extremidade novamente. O som produzido foi o mesmo, mas mais agudo (porque era a mesma



nota uma oitava acima):

Pitágoras decidiu continuar. Ele experimentou a corda dividida em 3 partes:



Foi aí que ele percebeu que apareceu um som novo e diferente. Desta vez, não era a mesma nota uma oitava acima, mas uma nota diferente, que precisava de um novo nome. Esse som, além de diferente, funcionou bem com o anterior, criando uma agradável harmonia para o ouvido, porque essas divisões mostravam as relações Matemática 1/2 e 2/3 e, aparentemente,o nosso cérebro gosta de relações lógicas definidas.

Assim, ele continuou fazendo subdivisões e combinações de sons criando matematicamente escalas que, posteriormente, estimularam a criação de instrumentos musicais que pudessem tocar essas escalas. Atualmente, as notas receberam os nomes que conhecemos hoje. As culturas criaram as suas próprias escalas. Por exemplo, a cultura Chinesa criou a escala pentatónica, enquanto a cultura Ocidental adotou um temperamento igual a 12 tons, conhecido como escala temperada ou escala cromática.

Fontes: http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/ e http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

Glossário

Frequência: A frequência é o número de ocorrências de um evento repetido por unidade de tempo. O período é a duração do tempo de um ciclo num evento repetido; portanto, o período é o recíproco da frequência. Por exemplo: se o coração de um bebê recém-nascido bate a uma frequência de 120 vezes por minuto, o seu período - o intervalo de tempo entre os batimentos - é de meio segundo (60 segundos divididos por 120 batimentos). A frequência é um parâmetro importante usado na ciência e na engenharia para especificar a taxa de fenómenos oscilatórios e vibratórios, como vibrações mecânicas, sinais de áudio (som), ondas de rádio e luz.

Intervalo (música): Na teoria musical, um intervalo é a diferença de afinação entre dois sons. Um intervalo pode ser descrito como horizontal, linear ou melódico se se referir a sons que soam sucessivamente, como dois tons adjacentes numa melodia, e vertical ou harmónico se se refere a sons que soam simultaneamente, como num acorde. Na música Ocidental, os intervalos são as diferenças mais comuns entre as notas de uma escala diatónica. O menor desses intervalos é um semitom. Intervalos menores que um semitom são chamados microtons. Eles podem ser formados usando as notas de vários tipos de escalas não diatnicas. Alguns dos menores são chamadas vírgulas e descrevem pequenas discrepâncias, observadas em alguns sistemas de afinação, entre notas anarmonicamente equivalentes, como C♯ e D ♭. Os intervalos podem ser arbitrariamente pequenos e até impercetíveis ao ouvido humano.

Oitava: Na música, uma oitava (latim: oitava: oitavo) ou oitava perfeita (às vezes chamada diapasão) é o intervalo entre um tom musical e outro com o dobro de frequência. A relação de oitava é um fenómeno natural que tem sido referido como o "milagre básico da música", cuja utilização é "comum na maioria dos sistemas musicais". O intervalo entre o primeiro e o segundo harmónicos da série harmónica é

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

uma oitava. Na notação musical, as notas separadas por uma oitava (ou várias oitavas) têm o mesmo nome da letra e são da mesma classe de afinação. Para enfatizar que é um dos intervalos perfeitos (incluindo uníssono, quarta perfeita e quinta perfeita), a oitava é designada P8. Outras qualidades de intervalo também são possíveis, embora raras. A oitava acima ou abaixo de uma nota indicada às vezes é abreviada como 8^{a} ou 8^{va} (italiano: all'ottava), 8^{va} bassa (italiano: all'ottava bassa, às vezes também 8^{vb}), ou simplesmente 8 para a oitava na direção indicada, colocando esta marca acima ou abaixo na pauta.

Pitágoras: Pitágoras de Samos [a] (c. 570 - c. 495 aC) era um antigo filósofo grego jónico e o fundador de mesmo nome do pitagorismo. Os seus ensinamentos políticos e religiosos eram bem conhecidos na Magna Grécia e influenciaram as filosofias de Platão, Aristóteles e, através delas, a filosofia Ocidental. O conhecimento da sua vida é ocultado pela lenda, mas parece que era filho de Mnesarchus, um entalhador de focas na ilha de Samos. Os estudiosos modernos discordam sobre a educação e as influências de Pitágoras, mas concordam que, por volta de 530 aC, ele viajou para Croton, onde fundou uma escola na qual os iniciados juravam segredo e viviam um estilo de vida ascético e comunitário. Esse estilo de vida envolvia uma série de proibições alimentares, tradicionalmente consideradas como vegetarianismo, embora os estudiosos modernos duvidem que ele tenha defendido o vegetarianismo absoluto.

Quarta: intervalo entre uma nota musical e outra, que está a três graus de distância da primeira, dentro de uma escala.

Quinta perfeito: intervalo entre uma nota musical e outra, que está a quatro graus de distância da primeira, dentro de uma escala.

Razão: Na matemática, uma razão é um relacionamento entre dois números, indicando quantas vezes o primeiro número contém o segundo. Por exemplo, se uma tigela de frutas contém oito laranjas e seis limões, a proporção de laranjas para limões é de oito para seis (ou seja, 8: 6, que é equivalente à proporção 4: 3). Da mesma forma, a proporção de limões para laranjas é 6: 8 (ou 3: 4) e a proporção de laranjas para a quantidade total de frutas é 8:14 (ou 4: 7). (*Retirado de*: https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio).

Terceira maior: Na música clássica da cultura ocidental, um terço é um intervalo musical que abrange três posições na pauta (consulte o número do intervalo para obter mais detalhes) e o terço maior é um terceiro com quatro semitons. Juntamente com a terceira menor, a terceira maior é uma das duas terceiras que ocorrem com mais frequência. É qualificada como maior porque é o maior dos dois: a terceira maior abrange quatro semitons, a terceira menor três semitons.

Terceira menor: Na teoria musical da cultura ocidental, um terço menor é um intervalo musical que abrange três meios-passos, ou semitons.

Tom: som de alta frequência da audição humana, geralmente acima de 5 KHz.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

A Matemática por trás das notas musicais

✓ O som é produzido a partir de uma vibração contínua do ar.

✓ O número de vibrações por segundo é chamado de frequência, medida em Hertz.

✓ A frequência do som determina o seu tom (consulte o glossário) <quanto maior a frequência, maior o tom>.

✓ Notas musicais são sons de certas frequências tocadas numa ordem crescente de frequências que produzirão uma escala musical.

✓ Considere dois tons (frequências) que são separados por uma distância arbitrária, i. Consequentemente, se tivermos as nossas duas frequências, f1 e f2, elas serão separadas pela distância do intervalo i1. Note que o Intervalo é a combinação de dois desses sons).

✓ Agora, a razão das duas frequências (f2 / f1) pode ser definida como r1 e pode ser expressa como:

$$f2 \div f1 = r1$$

✓ Se tivermos um segundo conjunto de frequências, f3 e f4, o intervalo entre elas poderá ser definido como i2. A razão de f3 e f4 (sendo f4 / f3) seria definida como r2. Se i1 e i2 tiverem o mesmo intervalo, o que significa que existe a mesma distância de frequência entre f1 e f2, bem como f3 e f4, as proporções serão iguais. Isso não nos diz nada sobre o registo das frequências, apenas que os intervalos são semelhantes (não sabemos se eles estão no mesmo registo). Poderíamos expressar como:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f4 \div f3 = r2$$

$$i1 \cong i2 \text{ if and only if } r1 = r2$$

✓ Se tivermos três frequências f1, f2 e f3. O intervalo entre f1 e f2 é i1, o intervalo entre f2 e f3 é i2 e o intervalo maior entre f1 e f3 é i3. Aplicando os mesmos conceitos de proporções calculadas nos exemplos anteriores, obtemos:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f3 \div f2 = r2$$

$$f3 \div f1 = r3$$

$$\therefore f2 = r1 \cdot f1 \text{ and } f3 = r2 \cdot f2$$

$$\text{Substituting in for } f2$$

$$f3 = r2 \cdot (r1 \cdot f1)$$

$$f3 \div f1 = r2 \cdot r1$$

$$\text{substituting } r3 \text{ for } f3 \div f1$$

$$r3 = r2 \cdot r1 \text{ and } i3 = i1 + i2$$

✓ Portanto, mostramos que adicionar intervalos é igual à multiplicação das taxas de frequência.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

$$\textit{since}\; r3 = r2 \cdot r1$$

$$\log(r3) = \log(r2) + \log(r1)$$

$$\textit{since}\; i3 = i2 + i1 \;\textit{we can show that}$$

$$i3 = \log(r3) \;\textit{and}\; i2 = \log(r2) \;\textit{and}\; i1 = \log(r1)$$

✓ Agora temos um número definido para o valor de i. É o log da razão das frequências que compreende o intervalo em questão. A taxa de frequência para qualquer intervalo especificado será positiva, mas pode ser maior que ou menor que 1. Se o valor de r for maior que 1, sabemos que 0 <f1 <f2 e o intervalo está a subir (porque f2 é maior que f1). Da mesma forma, se 0 <r <1 então 0 <f2 <f1 e sabemos que o intervalo está a descer. Portanto, o log de um intervalo ascendente (com r> 1) será positivo enquanto o log de um intervalo descendente (com r <1) será negativo.

✓ No piano, tocar DÓ e RÉ juntos é descrito como um grande segundo intervalo, porque RÉ é a segunda nota na escala

✓ Segue-se um terceiro intervalo maior, porque o MI é a terceira nota na escala

✓ De DÓ a FA é chamado o quarto intervalo perfeito

✓ de DÓ a SOL, que é a quinta nota, é chamado o quinto intervalo perfeito e assim por diante

✓ finalmente, um DÓ e DÓ tocado juntos é chamado de oitava (veja: https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug até ao minuto 2:08).

✓ Agora sabemos como determinar a razão de um intervalo formado a partir de outras relações. Por exemplo, se soubéssemos que um intervalo (r1) tinha uma proporção de 5/4 (que, se conhecer a sua série de tons, reconhecerá como uma terceira maior) e outro (r2) a proporção 6/5 (uma terceira menor), podemos calcular

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

a proporção da sua soma. Portanto, uma terceira maior (5/4) mais uma terceira menor (6/5) dá:

$$r1 \cdot r2 = r3$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

✓ A relação 3/2 é uma quinta perfeito. Assim, provamos matematicamente a partir de um conceito simples que uma terceira maior e uma terceira menor representam uma quinta perfeita! Um pequeno refrescar para as suas pequenas proporções de tons inteiros inteiro, para que possa tentar, sozinho, outros exemplos:

2/1	Octave
3/2	Perfect Fifth
4/3	Perfect Fourth
5/3	Major Sixth
5/4	Major Third
6/5	Minor Third

✓ Adotamos o conceito não quantificado de intervalo, derivamos um valor numérico real para ele a partir da razão de frequências e usamos a nossa fórmula para calcular a proporção de um intervalo resultante. Nas próximas semanas, derivaremos fórmulas para calcular frequências, definir o que é uma nota, determinar um método para encontrar a composição de qualquer intervalo e mostrar que a escala são funções modulares (e como usá-las).

✓ Todos os intervalos podem ser descritos como combinações diferentes da oitava, quinto perfeito e terço maior - os três primeiros tons.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

✓ Por conseguinte:

- As razões de intervalo são sempre maiores que 1 e menores que 2;
- Uma proporção de 2: 1 é uma oitava; todos os outros intervalos são menores que uma oitava.

✓ Seguindo uma série de sobretons, podemos tirar as seguintes conclusões:

- 1: 1 é o tom inicial, 2: 1 é uma oitava acima disso, 3: 1 é um quinto acima da oitava, 4: 1 é a segunda oitava e 5: 1 é um terço na segunda oitava.

✓ Vamos tentar agora encontrar uma maneira de escrever o quinto e o terço como frequências na primeira oitava. Podemos assumir que a proporção deve ser maior do que 1: 1 e menor do que 2: 1, e é assim que a oitava é expressa.

✓ Por conseguinte, podemos dividir a taxa de frequência pelo número de oitavas necessárias, obtendo a faixa de primeira oitava.

- Por exemplo, a proporção 3: 1 constitui um quinto perfeito, caindo na segunda oitava. Consequentemente, devemos reduzi-lo apenas uma oitava para obter uma proporção entre 1 e 2. Isso pode ser expresso da maneira seguinte:

Vamos expressar com a letra q/1 um intervalo em que q deve ser sempre maior que 2 e, ao mesmo tempo, um número primo. Para obter uma redução de oitava, precisamos encontrar um número n que obedeça à fórmula seguinte:

$$1 < \frac{q}{2^n} < 2$$

$$\Rightarrow 2^n < q < 2 \cdot 2^n$$

$$\Rightarrow 2^n < q < 2^{n+1}$$

✓ Mostramos, agora, que uma taxa básica pode ser transposta para uma única oitava.

✓ Os **três primeiros intervalos básicos** resultantes da aplicação da fórmula são: 2: 1 oitava, 3: 2 quinto perfeito e 5: 4 terço maior.

✓ Lembra-se que a duração do intervalo é dada pelo logaritmo da sua razão? Por exemplo, podemos usar variáveis para expressar a duração dos três primeiros intervalos básicos:

$$a=\log(2)$$

$$b=\log(3/2)$$

$$c=\log(5/4)$$

✓ Agora que expressamos as variáveis a, b e c como a duração do intervalo (que pode ser estimada através do logaritmo da razão de frequências), trabalharemos a seguir as TAREFAS MATEMÁTICAS, a fim de provar um método que determine a composição de qualquer outro intervalo como uma combinação dessas três.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

TAREFA

Pergunta principal: Prove que qualquer intervalo pode ser determinado como uma combinação dos intervalos a, b e c definidos no parágrafo anterior.

DICA 1: Como etapa inicial, lembre-se de que já definimos a duração dos três intervalos básicos como:

$a = \log(2)$

$b = \log(3/2)$

$c = \log(5/4)$

DICA 2: Para começar, use três novas variáveis, a saber, m, n e s para multiplicar pelos originais (a, b e c). Considere que a soma destes será a duração do intervalo desconhecido que estamos tentando determinar;

Portanto, a duração do novo intervalo pode ser expressa como:

$ma + nb + sc$

Perguntas Auxiliares:

Ao responder a estas perguntas intermediárias, poderá responder à pergunta principal desta tarefa ("Prove que qualquer intervalo pode ser determinado como uma combinação dos intervalos a, b e c definidos no parágrafo anterior")

(a) Considerando que a duração deste novo intervalo é $ma + nb + sc$, como poderíamos definir a sua razão?

(b) Com base nas descobertas das perguntas anteriores, poderia estimar a soma de um quinto perfeito e um terço maior?

Dica: Determine um quinto perfeito com a variável b e o terço maior com a variável c.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS:

A Matemática de Vídeos Musicais

https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug

Conversa de TED: Música e Matemática: O génio de Beethoven

https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY

Webpages:

Math Central: http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html

Universidade Kent State: https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/

Matemática e Música: http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/

Lições de Matemática e Música : https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/

Books:

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. Arts Education Policy Review, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). How Music and Mathematics Relate. The Great Courses, Virginia. Retirado de: http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher,R.H.,Shaw,G.I.,Levine,I. J.,Wright,E.L.,Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997). Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning. Neurological Research, 19, 2-8.

O presente projeto foi financiado pela Comissão Europeia. As opiniões nesta publicação expressas são, unicamente, da responsabilidade do seu autor, não podendo a Comissão Europeia ser responsabilizada pela utilização que possa ser feita das informações nelas contidas.