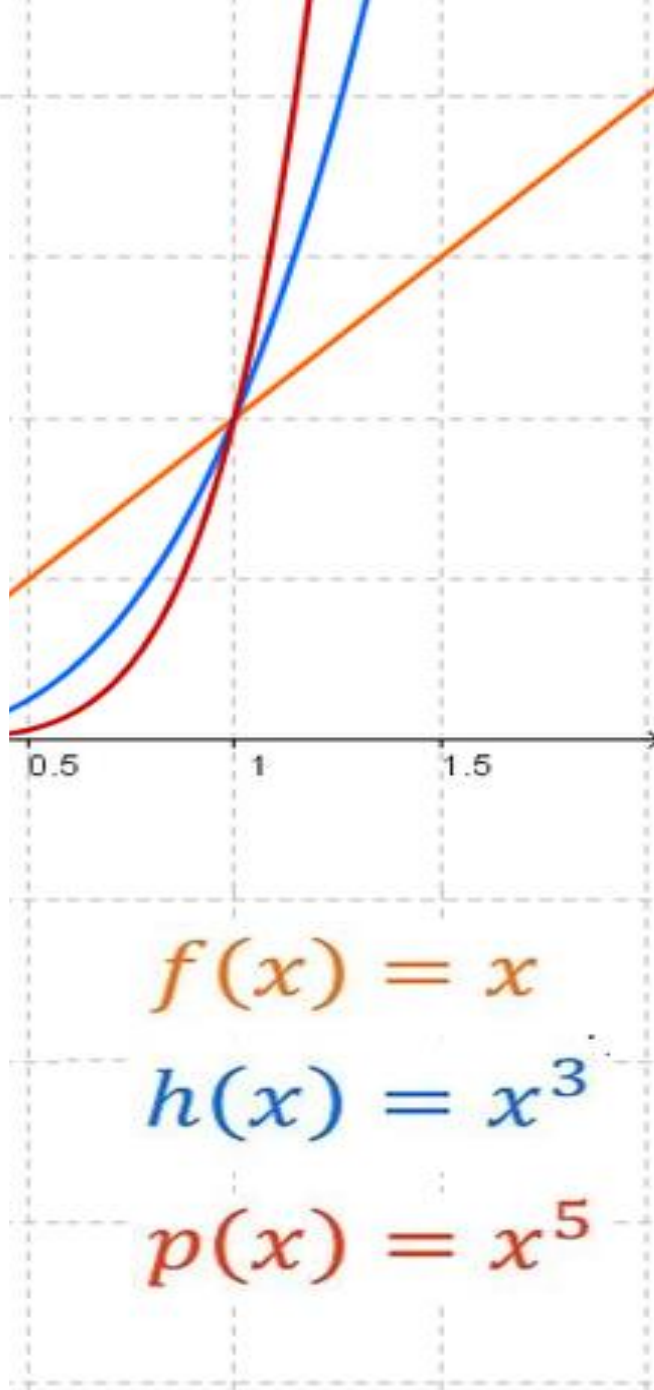
PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13-15



UNIDADE 18: POTÊNCIAS NA ESCALA TEMPERADA

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

TheArtOfMaths

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: Potências na Escala Temperada

Faixa Etária: 13 – 15 anos

Duração: 3 horas

Conceitos Matemáticos: Potências, propriedades de potências, operações com potências.

Conceitos Artísticos: Escala temperada de 12 notas, notas musicais e frequência das notas musicais

Objetivos Gerais: Perceberem a noção de potência, as suas propriedades e fazerem cálculos usando as regras operatórias de potências.

Instruções e Metodologias: Será útil utilizar uma calculadora científica (pode ser a calculadora gráfica online Desmos) para os/as alunos/as aprenderem a calcular potências na calculadora e assim poderem verificar as soluções dos exercícios.

Recursos: Computador com ligação à internet; Acesso ao website: https://www.desmos.com/

Dicas para o professor: Começar por dar um ou dois exemplos de cada regra operatória, com grau de dificuldade crescente, para explicar como se deve proceder, para que depois os alunos possam resolver os exercícios sozinhos.

Resultados de aprendizagem e competências:

No final deste módulo, o aluno será capaz de:

- Dominar as regras operatórias das potências;
- Calcular o valor de expressões numéricas usando as regras operatórias das potências.

Síntese e Avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

Introdução

A Matemática e a Música estão relacionadas desde sempre, no entanto, apenas no século VI a.C., existem as primeiras evidências dessa relação. Pitágoras comparou o som produzido por martelos, usados por ferreiros, de diferentes comprimentos com os sons produzidos por um monocórdio, do qual supostamente Pitágoras terá sido o inventor. Com esta comparação Pitágoras descobre as razões matemáticas por trás dos sons.

Pitágoras aprimorou as razões matemáticas por trás dos sons, através do estudo dos sons que o monocórdio produzia. Dividiu a corda em duas partes iguais, de seguida em três partes iguais e assim sucessivamente. Foi combinando os sons matematicamente consoante as subdivisões que ia fazendo e criou escalas onde cada nota mantinha uma relação bem definida com a outra.
Com o passar do tempo as notas foram denominadas conforme as conhecemos atualmente.

Outras escalar musicais foram criadas por outras culturas e povos, por exemplo o povo Chinês criou a escala pentatónica.
Na cultura ocidental foi adaptada uma escala com 12 notas, denominada de escala temperada ou escala cromática.

Potências na Música

Pitágoras, no século VI a.C., usou o monocórdio para estudar a relação entre o comprimento da corda vibrante e o tom musical que ela produz.
Imagine-se uma corda esticada e presa nas extremidades. Essa corda vibra quando tocada no meio, produzindo um som que é chamado de nota fundamental. De seguida Pitágoras dividiu a corda em duas partes iguais, depois em três partes iguais e continuou a fazer subdivisões, obtendo os harmónicos da nota fundamental, e foi combinando matematicamente os sons. Dá-se assim a criação das escalas, onde cada nota mantém uma relação bem definida com a outra.

Mantendo-se os intervalos (razão numérica de $\frac{3}{2}$) entre as notas e partindo do intervalo de oitava dado pelas frequências $\mathbf{f_0}$ e $\mathbf{2f_0}$ pode-se formar a escala diatónica pitagórica. As notas obtidas, que vulgarmente conhecemos por Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si, formam a chamada escala diatónica de sete notas que durante séculos foi a base de outras escalas.

A partir da Idade Média observou-se que ocorriam alguns problemas (por exemplo as notas Si e Dó eram próximas uma da outra) e decidiu-se criar uma escala mais abrangente em que todas as notas deveriam ter a mesma distância uma das outras. Para essa distância foi definida o valor do intervalo entre o Dó e o Si (um semitom). Este feito resultou numa escala temperada de 12 notas que foi melhorada por J. S. Bach.

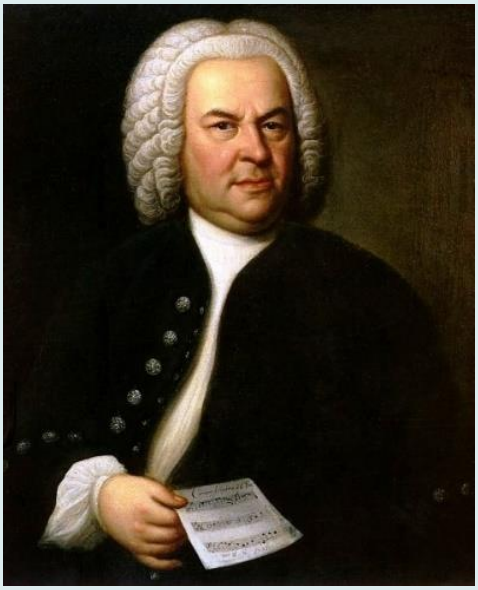


Fig. 1 - Johann Sebastian Bach
(Fonte:https://commons.wikimedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach)

Ao contrário de Pitágoras que formou a escala diatónica pitagórica obtendo 7 notas através de uma divisão que pode ser representada por frações, esta nova escala temperada pode ser explicada através do uso de potências com base de 2 e resulta em 12 notas: Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-Lá e Si.

Notas	Semitons	Escala temperada de 12 notas
Dó	0	$2^0 = 1$
Dó#	1	$2^{1/12}$
Ré	2	$2^{2/12}$
Ré#	3	$2^{3/12}$
Mi	4	$2^{4/12}$
Fá	5	$2^{5/12}$
Fá#	6	$2^{6/12}$
Sol	7	$2^{7/12}$
Sol#	8	$2^{8/12}$
Lá	9	$2^{9/12}$
Lá#	10	$2^{10/12}$
Si	11	$2^{11/12}$
Dó (oitava)	12	$2^1 = 2$

Tabela 1 – Divisão da oitava numa escala temperada de 12 notas

Glossário

"#": símbolo denominado sustenido e que indica a elevação de um semitom na nota.

Escala Musical: Sequência ordenada de tons pela frequência vibratória de sons (normalmente do som de frequência mais baixa para o de frequência mais alta).

Escala Temperada: divisão da oitava em doze semitons iguais.

Frequência Fundamental: a mais baixa e mais forte frequência componente da série harmónica de um som.

Frequência: grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento, num determinado intervalo de tempo.

Harmónico: som de uma série que constitui uma nota.

Monocórdio: antigo instrumento musical, composto por uma caixa-de-ressonância, sobre a qual era estendida uma única corda presa por dois cavaletes móveis no sistema musical ocidental tradicional.

Nota Fundamental: nota principal de um acorde.

Oitava: intervalo entre notas com a metade ou o dobro da sua frequência.

Semitom: intervalo que é a metade de um tom e que constitui a distância mínima.

Série Harmónica: conjunto de ondas composto da frequência fundamental e de todos os múltiplos inteiros desta frequência.

A Matemática por trás da Escala Temperada: potências

Como vimos anteriormente a escala cromática ou temperada foi dividida em 12 partes, sendo que a afinação da nota seguinte é obtida multiplicando o valor da afinação da nota anterior pela potência de base 2, $\mathbf{2^{1/12}}$.

Exemplo: $\textbf{Afinação temperada da nota Ré} = 2^{1/12} \times \textbf{Afinação temperada da nota Dó\#} = 2^{1/12} \times 2^{1/12} = 2^{2/12}$.

Para percebermos mais um pouco sobre potências vamos então debruçar-nos sobre este conceito e as suas propriedades.

Potências

Numa multiplicação quando os fatores são iguais podemos recorrer à representação na forma de potência.

Por exemplo: $\mathbf{2 \times 2 \times 2 = 2^3}$

Base: 2 (fator que se repete)

Expoente: 3 (número de vezes que se repete o fator)

Propriedades das potências

O **produto de potências com a mesma base** é uma potência com a mesma base e com expoente igual à soma dos expoentes.

$$\boldsymbol{a^m \times a^n = a^{m+n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos: $\mathbf{3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6}$ e $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

O **produto de potências com o mesmo expoente** é uma potência com o mesmo expoente e com base igual ao produto das bases.

$$\boldsymbol{a^m \times b^m = (a \times b)^m; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R} \text{ e } m \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos: $\mathbf{3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 = 12^2}$ e $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} \times \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{25}\right)^2$

O **quociente de potências com a mesma base** é uma potência com a mesma base e com expoente igual à diferença dos expoentes.

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}; a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; m \in \mathbb{Z}} \text{ e } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos: $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$ e $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

O **quociente de potências com o mesmo expoente** é uma potência com o mesmo expoente e com base igual ao quociente das bases.

$$\boldsymbol{a^m : b^m = (a : b)^m; a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}} \text{ e } \boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos: $3^2 : 4^2 = (3 : 4)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ e $\left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5} : \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{20}\right)^2$

Potência de potência é uma potência com a mesma base e cujo expoente é igual ao produto dos expoentes.

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{m \times n}; a \in \mathbb{R}; m \in \mathbb{Z}} \text{ e } \boldsymbol{n \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos: $(4^3)^2 = 4^{3\times 2} = 4^6$ e $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5\times 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Potência de base 0: $\boldsymbol{0^n = 0}$ com $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Exemplo: $0^4 = 0$

Potência de expoente 0: $\boldsymbol{a^0 = 1}$ com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Exemplo: $5^0 = 1$

Potência de base 1: $\boldsymbol{1^n = 1}$ com $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$

Exemplo: $1^4 = 1$

O apoio da Comissão Europeia à produção desta unidade não constitui um aval do seu conteúdo, que reflete unicamente o ponto de vista dos autores, e a Comissão não pode ser considerada responsável por eventuais utilizações que possam ser feitas com as informações nela contidas.

Potência de expoente 1: $\boldsymbol{a^1 = a}$ com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$

Exemplo: $\mathbf{5^1 = 5}$

Potência de expoente negativo:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}} \text{ e } \boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}; \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\} \text{ e } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Exemplos: $\mathbf{3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}}$ e $\mathbf{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2}}$

Potências com expoente racional:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}; \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z} \text{ e } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Exemplos: $\mathbf{3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{3^5} = \sqrt{3^5}}$ e $\mathbf{5^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}}}$

Observações:

- O sinal de uma potência de base positiva e expoente natural é positivo.
- O sinal de uma potência de base negativa e expoente natural é:

  - positivo se o expoente é par;

  - negativo se o expoente é ímpar.
- $(-a)^n = a^n$ se n é par
- $(-a)^n = -a^n$ se n é ímpar
- $(a^m)^n$ e a^{m^n} geralmente apresentam resultados diferentes, porque $(a^m)^n = (a^m) \times (a^m) \times \ldots \times (a^m)$ (n vezes) e $a^{m^n} = a^{m \times m \times \ldots \times m}$ (n vezes)

  Exemplo: $\mathbf{(5^2)^3 = 5^{2\times 3} = 5^6}$ e $\mathbf{5^{2^3} = 5^8}$

TAREFAS

TAREFA 1

Calcule o valor de:

1.1. $(-2)^3$ **1.2.** 1^5 **1.3.** $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ **1.4.** 0^{10} **1.5.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

TAREFA 2

Preenche os espaços de modo a obteres afirmações verdadeiras:

2.1. $4^3 \times 4^5 = 4^{\cdots};$

2.2. $(-3)^{\cdots} \times (-3)^5 = (-3)^8;$

2.3. $5^7 : 5^5 = 5^{\cdots};$

2.4. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{\cdots} : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3;$

2.5. $\left(3^5\right)^{\cdots} = 3^{10};$

2.6. $\left(\ldots^5\right)^3 = 3^{15};$

2.7. $\left(\frac{27}{8}\right)^2 = \left(\frac{\cdots}{\cdots}\right)^6$

TAREFA 3

Represente na forma de uma única potência de expoente positivo:

3.1. $4^{-3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

3.2. $(3^{-2})^6 \times 5^{12}$

3.3. $\frac{5^{-8}}{5^3}$

3.4. $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-12}$

TAREFA 4

Calcule o valor numérico de cada uma das seguintes expressões, utilizando as regras para operar com potências:

4.1. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-7} \times \left(2 + \frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1};$

4.2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} : 2^7 + (0,1)^{-1};$

4.3. $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-12}}{\left(1-\frac{2}{5}\right)^{10}}.$

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Escala cromática

https://www.youtube.com/watch?v=IbgOcXar9UA

Potências e suas propriedades

https://pt-pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals

https://matematicabasica.net/potenciacao/

https://www.youtube.com/watch?v=9VuLwo1FBys

Confirme os valores obtidos nos exercícios with Desmos web application

https://www.desmos.com/

Escala Temperada de 12 notas (inglês):

http://www.tonalsoft.com/enc/number/12edo.aspx