

PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

“Pauta Musical”
(Fonte: <https://www.pexels.com/photo/black-and-white-keys-music-note-534283/>)

UNIDADE 16: SÉRIES NUMÉRICAS NA SÉRIE HARMÓNICA

SPEL – Sociedade Promotora de
Estabelecimentos de Ensino



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guia do Professor

Título: Série Harmónica

Faixa Etária: 13 – 15 anos

Duração: 3 horas

Conceitos Matemáticos: Séries numéricas

Conceitos Artísticos: Série harmónica na música, notas musicais e frequência das notas musicais.

Objetivos Gerais: Perceberem a noção de série numérica e conseguirem calcular alguns dos seus termos, bem como o seu termo geral.

Instruções e Metodologias: De forma a que os estudantes obtenham uma imagem clara dos modos de vibração, exiba o vídeo “Modos de vibração” (cf. secção “Informações e Recursos Adicionais”) depois da respetiva explicação.

Recursos: Uma caneta; A tarefa 1 requer uma caixa de papel, um elástico e dois lápis marcadores.

Dicas para o professor: Começar por dar alguns exemplos de séries numéricas para explicar o conceito e depois ensinar a completar as mesmas. Através de um exemplo explicar como chegar ao termo geral de uma série numérica.

Resultados de aprendizagem e competências:

No final deste módulo, o aluno será capaz de:

- Identificar uma série numérica;
- Calcular alguns termos de uma série numérica;
- Calcular o termo geral de uma série numérica.

Síntese e Avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

Introdução

A Matemática e a Música estão relacionadas desde sempre, no entanto, apenas no século VI a.C., existem as primeiras evidências dessa relação. Pitágoras comparou o som produzido por martelos, usados por ferreiros, de diferentes comprimentos com os sons produzidos por um monocórdio, do qual supostamente Pitágoras terá sido o inventor. Com esta comparação Pitágoras descobre as razões matemáticas por trás dos sons.

Pitágoras aprimorou as razões matemáticas por trás dos sons, através do estudo dos sons que o monocórdio produzia. Dividiu a corda em duas partes iguais, de seguida em três partes iguais e assim sucessivamente. Foi combinando os sons matematicamente consoante as subdivisões que ia fazendo e criou escalas onde cada nota mantinha uma relação bem definida com a outra.

Com o passar do tempo as notas foram denominadas conforme as conhecemos atualmente.

Outras escalas musicais foram criadas por outras culturas e povos, por exemplo o povo Chinês criou a escala pentatónica.

Na cultura ocidental foi adaptada uma escala com 12 notas, denominada de escala temperada ou escala cromática.

Séries Harmónicas

É do conhecimento comum a escala das sete notas musicais “naturais”: A, B, C, D, E, F e G. Não obstante, estas são representadas na maior parte dos países pela convenção de nomenclatura de solfejo: Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-Lá-Si, de acordo com a seguinte correspondência: C-Dó, D-Ré, E-Mi, F-Fá, G-Sol, A-Lá e B-Si. A definição destas notas foi amplamente influenciada pela Matemática.

No século VI a.c, Pitágoras percebeu que se colocasse uma corda em vibração, esta não só vibraria na sua extensão total, como também formaria uma série de nós, os quais se dividem em secções mais pequenas, os ventres, que vibram a uma frequência mais alta que a frequência fundamental.

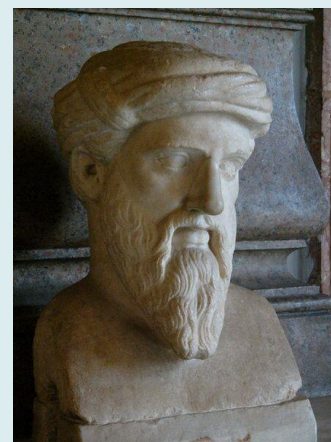


Fig. 1 – Busto de Pitágoras

(Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kapitolinischer_Pythagoras_adjusted.jpg)

A fim de estudar a relação entre a duração da vibração da corda e o tom por ela produzido, Pitágoras usou um monocórdio.

Na figura 2 é possível observar os nós e os ventres das quatro primeiras frequências de uma série. Para uma fácil compreensão, são dispostas separadamente, mas, numa corda real, todas se sobrepõem, o que origina um desenho complexo, similar à forma de onda de um instrumento.

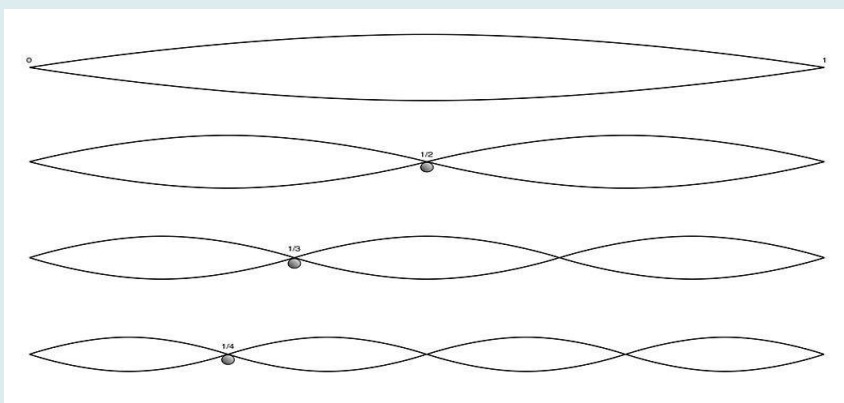


Fig. 2 – Nós e ventres das primeiras 4 frequências

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%Aancia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Imagine uma corda esticada, presa em cada ponta. Ao tocarmos no meio da corda, esta vibra (figura 3) e produz uma nota, denominada de nota fundamental.



Fig. 3 – Modos de vibração de uma nota fundamental 1(f)

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%A2ncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pitágoras decidiu dividir a corda em duas partes (figura 4) e tocar no meio de uma das partes. O som produzido foi o mesmo, embora com uma frequência maior (comumente exemplificado através da expressão “a mesma nota, uma oitava acima”). Desde então, ficou provado que sempre que o número de divisões (ou número harmónico) é múltiplo de um número anterior, o som será repetido, porém com uma nota mais alta/aguda.

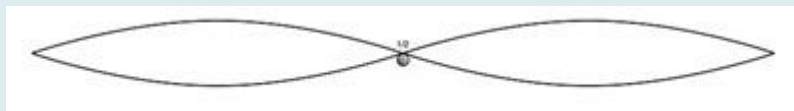


Fig. 4 – Modos de vibração de uma nota fundamental 2(f)

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%A2ncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Pitágoras decidiu então experimentar dividir a corda em 3 partes (figura 5) para descobrir como soaria e reparou que um novo som, diferente do anterior, fora emitido. Desta vez, não se seguiu a premissa “mesma nota, uma oitava acima”, mas sim uma nota completamente diferente, tendo direito a outra designação – a quinta.



Fig. 5 – Modos de vibração de uma nota fundamental 3(f)

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Frequ%C3%A2ncia_fundamental#/media/Ficheiro:Overtone.jpg)

Este som, embora diferente, combinou bem com o som anterior. Criou uma harmonia agradável ao ouvido, devido ao facto de as divisões feitas terem as relações matemáticas de $1/2$ e $2/3$. Com a divisão da corda em quatro partes, ele obteve uma nota conhecida agora como “quarta”. Estas três notas estão em consonância com a nota fundamental.

Desta forma, continuou a subdividir a corda, obtendo a harmonia da nota fundamental, e, ao combinar os sons de forma matemática, criou escalas, as quais resultam em notas que se relacionam naturalmente umas com as outras. Ao longo do tempo, foram sendo

dados às notas os nomes pelos quais as conhecemos nos dias de hoje, que já foram mencionados.

Neste processo, cada nota que provém de um objeto sofre a influência de uma frequência fundamental que exulta outras harmonias, a qual resulta numa série de frequências – as séries harmónicas, infinitas e compostas por ondas sinusoidais com todas as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. Não existe uma só série harmónica, mas sim uma série diferente para cada frequência fundamental.

Olhemos um exemplo de uma série harmónica que começa com A_2 / Lá₁ (110 Hz). As primeiras 16 harmonias para essa série podem ser observadas na tabela seguinte:

Harmónico #	Nota (Inglês)	Nota (Neolatino)	Frequência (Hz)
1 (F)	A ₂	Lá ₁	110
2	A ₃	Lá ₂	220
3	E ₄	Mi ₃	330
4	A ₅	Lá ₃	440
5	C# ₅	Do# ₄	550
6	E ₄	Mi ₄	660
7	G ₄	Sol ₄	770
8	A ₅	Lá ₄	880
9	B ₅	Si ₄	990
10	C# ₆	Do# ₅	1100
11	D# ₆	Ré# ₅	1210
12	E ₆	Mi ₅	1320
13	F# ₆	Fá# ₅	1430
14	G ₆	Sol ₅	1540
15	G# ₅	Sol# ₅	1650
16	A ₆	Lá ₅	1760

Tabela 1 – Primeiros 16 harmónicos

Glossário

Agudo: Som de alta frequência da audição humana, normalmente acima dos 5 KHz

Escala Musical: Sequência ordenada de tons pela frequência vibratória de sons (normalmente do som de frequência mais baixa para o de frequência mais alta)

Escala Pentatônica: conjunto de todas as escalas formadas por cinco notas ou tons

Escala Temperada: divisão da oitava em doze semitons iguais

Frequência: grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento, num determinado intervalo de tempo

Frequência Fundamental: a mais baixa e mais forte frequência componente da série harmônica de um som

Harmonia: combinação simultânea de sons

Harmônico: som de uma série que constitui uma nota

Monocórdio: antigo instrumento musical, composto por uma caixa-de-ressonância, sobre a qual era estendida uma única corda presa por dois cavaletes móveis

Nota Fundamental: nota principal de um acorde

Oitava: intervalo entre notas com a metade ou o dobro da sua frequência

Quarta: intervalo entre notas, que esteja a três graus de distância da primeira, dentro de uma escala

Quinta: intervalo entre notas, que esteja a quatro graus de distância da primeira, dentro de uma escala

Série Harmônica: conjunto de ondas composto da frequência fundamental e de todos os múltiplos inteiros desta frequência

A Matemática por trás da Série Harmônica: Séries Numéricas

As divisões feitas por Pitágoras na corda do monocórdio correspondem a divisões da unidade por números naturais, ou seja usando a sequência $1, 2, 3, 4, \dots, n$, ou se

quisermos, correspondem à sequência $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$. Se pensarmos na parte que

vibra, correspondem à sequência $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}$.

Sequências numéricas

Uma **sequência** ou sucessão, é um conjunto de objetos de qualquer natureza, organizados ou escritos numa ordem bem determinada.

Exemplos:

O conjunto (janeiro, fevereiro, março, abril, ..., dezembro) é uma sequência ou sucessão dos meses do ano.

O conjunto $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ é chamado sequência ou sucessão dos números naturais.

Uma **sequência numérica** é uma função que tem como domínio o conjunto dos números naturais e como contradomínio (conjunto de chegada) o conjunto dos números reais.

As sequências numéricas podem ser finitas, quando é possível “contar” os seus elementos, ou infinitas, quando não é possível “contar” os seus elementos. Visualize, nos dois casos, as representações matemáticas:

Sequência finita: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

Sequência infinita: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$

Leitura dos termos anteriores:

a_1 → a índice 1 (primeiro termo ou termo de ordem 1)

a_2 → a índice 2 (segundo termo ou termo de ordem 2)

a_3 → a índice 3 (terceiro termo ou termo de ordem 3)

a_n → a índice n (enésimo termo ou termo de ordem n)

Veja exemplos de sequências finitas e infinitas:

Sequência finita: (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)

Sequência infinita (3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)

As sequências são dadas, na sua maioria, através de uma fórmula matemática chamada **termo geral**. Este é a lei de formação que define qualquer um dos termos da sequência.

9

Exemplos:

- 1) Dada a sequência definida por $a_n = 4n - 1$, com $n \in \mathbb{N}$, calcule o primeiro e o terceiro termos.

Lembre-se de que o domínio desta sequência é \mathbb{N} , sendo assim, o primeiro termo é a_1 e calcula-se substituindo o n por 1.

Para $n = 1$, temos: $a_1 = 4 \times 1 - 1 = 3$

Para $n = 3$, temos: $a_3 = 4 \times 3 - 1 = 11$.

2) Considera a sequência aritmética 5, 8, 11...

O primeiro termo da sequência é 5 e depois do primeiro termo, obtém-se qualquer outro termo adicionando 3 ao termo anterior.

Veja, por exemplo, os cálculos seguintes relacionados com os primeiros termos:

n	Cálculo do n termo	
1	5	= 5 + 0 x 3 = 5
2	5 + 3	= 5 + 1 x 3 = 8
3	5 + 3 + 3	= 5 + 2 x 3 = 11
4	5 + 3 + 3 + 3	= 5 + 3 x 3 = 14
5	5 + 3 + 3 + 3 + 3	= 5 + 4 x 3 = 17

Tabela 2 – Exemplo do cálculo dos n.º termos de uma sequência

A tabela mostra que podemos obter o termo de ordem n (onde n é qualquer ordem de termo) a partir do primeiro termo 5 e adicionando a razão 3 repetidamente para $n - 1$ vezes. Isto pode ser escrito algebricamente como $5 + 3(n - 1)$. Esta expressão simplificada tem a forma de $3n + 2$.

TAREFAS

🎵 TAREFA 1

Utilizando uma caixa de cartão, um elástico e dois marcadores, reproduz a experiência realizada por Pitágoras com um monocórdio.



Atente para o facto de, ao mudar o lugar de um dos marcadores, um diferente som é produzido. Consulte o seguinte vídeo para uma demonstração mais detalhada:

<https://www.youtube.com/watch?v=AQJw95-H9mM>

11

🧠 TAREFA 2

Escreva os quatro primeiros termos da sequência (u_n) , sabendo que:

2.1) $u_n = 5n - 2$

2.2) $u_n = -3n + 1$

2.3) $u_n = \frac{1}{n}$

2.4) $u_n = \frac{1}{3n}$

2.5) $u_n = \frac{1}{n^3}$



TAREFA 3

Escreva os dois termos seguintes e o termo geral da sequência (u_n) em que os primeiros termos são:

3.1) 3, 6, 9, 12, 15, ...

3.2) 4, 9, 14, 19, 24, ...

3.3) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

3.4) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

A Matemática da Música (inglês)

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKUg>

Modos de vibração (inglês)

<https://www.youtube.com/watch?v=cnH2ltfW48U>

As Séries Harmónicas (inglês)

<https://www.oberton.org/en/overtone-singing/harmonic-series/>

Compreender intervalos musicais, escalas, afinação e timbre (inglês)

<http://in.music.sc.edu/fs/bain/atmi02/hs/hs.pdf>

Sequências numéricas

<https://pt.khanacademy.org/math/pt-7-ano/algebra1-7ano#sequencia-recursiva-e-nao-recursiva>