

## PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

---

### UNIDADE 15: AFINAÇÃO PITAGÓRICA E PROPORÇÕES

---

LogoPsyCom



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

## Guia do Professor

**Título:** Afinação pitagórica e proporções

**Faixa Etária:** 13 –15 anos

**Duração:** 1 hora

**Conceitos matemáticos:** afinação pitagórica, proporções

**Conceitos artísticos:** notas, intervalos, ondas sonoras, tom, frequência, Pitágoras

**Objetivos gerais:** descobrir os conceitos matemáticos escondidos nas composições musicais e adquirir uma visão mais prática em relação à utilidade da matemática.

**Instruções e metodologias:** os alunos irão explorar ambos os campos como um só, ouvindo ou, tocando música e vendo os vídeos sugeridos que analisam composições musicais. Irão descobrir as bases dos conceitos matemáticos mencionados.

**Dicas para o professor:** aprender executando é muito eficiente, especialmente com alunos mais jovens e com dificuldades na aprendizagem. Explique sempre a utilidade do conceito matemático na prática e crie um ambiente voltado para a experiência.

**Recursos:** a unidade fornece vídeos e recursos online para serem usados na aula. Os tópicos abordados nestes recursos irão ajudá-lo a encontrar outros materiais, que irão personalizar e dar nuances às suas aulas.

**Objetivos de aprendizagem e competências:** no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Compreender o processo lógico por detrás das composições musicais;
- Compreender a utilidade da afinação Pitagórica na música;
- Compreender e calcular as proporções em intervalos.

### Síntese e avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 aspetos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto que necessite de ser melhorado:	1.

## Introdução

A música e a matemática não demonstram uma ligação óbvia para aqueles que nunca compuseram ou leram uma pauta musical. Todavia, aparenta ser claro que o tempo das composições musicais e a estruturação das pautas, por medidas, invoca um pensamento matemático.

Muitos estudiosos estudaram as implicações da matemática nas artes. A música foi um dos pontos focados nos seus estudos. Foi descoberto que, no decorrer da história, muitos matemáticos exploraram essa questão. Pitágoras, Leonardo Bonacci (também conhecido como Fibonacci) e muitos outros contribuíram para esta pesquisa. Diferentes aspetos da matemática, desde a geometria básica e sequências numéricas até trigonometria, demonstraram ser usados nas composições matemáticas.

Nesta unidade iremos colocar o foco na aplicação da matemática nas composições musicais. Para isso, iremos investigar o sistema de afinação Pitagórica e explorar as possibilidades que oferece na composição musical.

## Como funciona o fenómeno da música?

Quando tocamos música, as vibrações produzidas e o movimento das partículas de ar entram pelos nossos ouvidos e permitem-nos ouvir os sons nas frequências certas. Se olharmos para a corda de uma guitarra podemos vê-la mover de uma certa forma e com um certo ritmo. Quando esticamos uma corda o seu tom fica mais alto e a sua frequência mais rápida. O que é produzido é o que chamamos de onda sonora e entra diretamente nos nossos ouvidos, movendo o fluido da nossa cóclea, na parte interna do nosso ouvido.

Claro que Pitágoras, um filósofo Grego de por volta de 570 – 495 a.C., não estava ciente de tudo o que sabes hoje sobre o corpo humano nem sobre composição musical. Contudo, desenvolveu uma teoria sobre como calcular as proporções nos intervalos, que é o que iremos aprender nesta aula. A lenda refere que ele ouviu diferentes sons provenientes de martelos nos ferreiros e que descobriu que quando um martelo era duas vezes maior ou duas vezes mais pesado que outro este produzia a mesma notas, mas uma oitava mais alta.

## Glossário

**Frequência:** dá-nos a velocidade de uma vibração e o tom do som.

**Tom:** é se uma nota é alta ou baixa e as suas medidas são dadas em Hertz.

**Onda sonora:** representa a vibração produzida pelo som. O seu comprimento e velocidade determinam o tom ou a frequência do som.

**Cóclea:** a cavidade espiral situada no ouvido interno que reage com as vibrações sonoras.

**Intervalo:** é o tom diferente entre dois sons

**Oitava:** é o tom diferente entre uma nota e outra que tem o dobro da sua frequência.

## A Matemática por trás das composições musicais

📺 Veja este vídeo da Universidade de São Paulo que explica este fenómeno com mais detalhe: <https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8>.

### Notas e Intervalos:

Um sistema de afinação é usado para determinar em que tons se toca.

Há doze notas no sistema de afinação Pitagórico:



Os intervalos são feitos de duas notas. Por exemplo, o intervalo C a E é chamado terceiro maior intervalo. A afinação pitagórica é baseada na proporção **(1:2)** em intervalos chamados **oitavas**, tais como o C até C' e com a proporção de **(2:3)** em intervalos chamados **quintas perfeitas**, tal como de C a G.

Os pitagóricos acreditavam que só as notas em que a frequência era uma fração com números pequenos eram agradáveis de ouvir em conjunto. É por isso que escolheram a oitava e a quinta perfeita como base para criar composições musicais.

## Como é que funciona?

De acordo com a afinação Pitagórica, para calcular as proporções dentro de uma escala iremos precisar de trabalhar com intervalos de oitavas e quintas perfeitas.

**Vejamos alguns exemplos: começando com C e, usando apenas as notas maiores (as a branco):<sup>1</sup>**

1) O que sabemos: C a G é (2:3) e G a D também é (2:3)

O que queremos: descobrir C a D'

O que fazemos: multiplicamos ambas as proporções.

$$\text{A matemática: } \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

Então a proporção é (4:9)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
2:				3							x2
				2:				3			x3
4:								9			

7

2) O que sabemos: C a D' é (4:9) e a oitava D a D' é (1:2)

O que queremos encontrar: C a D

O que fazemos: dividimos a proporção (4:9) por (1:2)

$$\text{A matemática: } \frac{9/4}{2/1} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Então a proporção é (8:9)

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
4:								9:			x2
	1:							2			x9
8:	9										

<sup>1</sup> Inspirado no video de Working iveshoot: <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>

## TAREFA

### Procure mais proporções!<sup>2</sup>

Encontre os outros elementos da escala maior começando pelo C.

De modo a resolver o exercício preencha as tabelas seguintes.

1) O que sabemos: C a D é (8:9) e D a A é (2:3)

O que queremos encontrar: C a A

O que fazemos:

A matemática:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
8:	9										<b>x2</b>
	2:				3						<b>x9</b>
<b>16:</b>					<b>27</b>						

8

2) O que sabemos: C a A é (16 : 27) e A a E' é (2:3)

O que queremos encontrar: C a E'

O que fazemos:

A matemática:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
16:					27						<b>x2</b>
					2:				3		<b>x27</b>
<b>32:</b>									<b>81</b>		

3) O que sabemos: C a E' é (32:81) e E a E' é (1:2)

O que queremos encontrar: C a E

O que fazemos:

<sup>2</sup>Inspiração no vídeo de Working iveshoot: <https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJKKug>

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
32:									81		<b>x2</b>
		1:							2		<b>x81</b>
<b>64:</b>		<b>81</b>									

4) O que sabemos: C a E é (64:81) e E a B é (2:3)

O que queremos encontrar: C a B

O que fazemos:

A matemática:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
64:		81									<b>x2</b>
		2:				3					<b>x81</b>
<b>128:</b>						<b>243</b>					

5) O que sabemos: C a B é (128:243) e B a F' é (2:3)

O que queremos encontrar: C a F'

O que fazemos:

A matemática:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
128:						243					<b>x2</b>
						2:				3	<b>x243</b>
<b>256:</b>										<b>729</b>	

6) O que sabemos: C a F' é (256:729) e F a F' é (1:2)

O que queremos encontrar: C a F

O que fazemos:

A matemática:

C	D	E	F	G	A	B	C'	D'	E'	F'	
256:										729	x2
			1:							2	x729
512:			729								

Pode agora dar a proporção para todas as notas!

C	D	E	F	G	A	B	C'
1/1	9/8	81/64	729/512	3/2	27/16	243/128	2/1

## INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Vídeo sobre a afinação Pitagórica:

<https://www.youtube.com/watch?v=MYvaJrlpwKI>

Vídeo sobre como é que a matemática é usada na música:

<https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8>

As teorias de Pitágoras na música, na geometria e na matemática:

<http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/tcc-marcos>

“Exploração da relação entre a matemática e a música” de Saloni Shah, 2010:

[http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS\\_ep2010\\_103.pdf](http://eprints.ma.man.ac.uk/1548/1/covered/MIMS_ep2010_103.pdf)

Animação sobre a afinação Pitagórica:

<https://www.youtube.com/watch?v=66l6MBQgcRg>