

PARTE II: Música e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 13 – 15

UNIDADE 14: RAZÕES DE FREQUÊNCIAS DE NOTAS MUSICAIS

C.I.P. Citizens In Power



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Guia do Professor

Título: Razões de frequências de notas musicais

Faixa Etária: 13 –15 anos

Duração: 1 hora

Conceitos matemáticos: intervalos, frequências, razões, logaritmos.

Conceitos artísticos: matemática por trás de notas musicais.

Objetivos gerais: mostrar que adicionar intervalos é igual a multiplicar frequências.

Instruções e metodologias: a unidade é baseada numa introdução geral sobre a relação entre a matemática e a música, mas torna-se um pouco mais desafiadora na seção Matemática por trás. Tentou-se torná-la o mais "leve" e compreensível possível por imagens, exemplos, fotos e um vídeo do YouTube.

Dicas para o professor: pode começar com algumas perguntas gerais para atrair o interesse dos alunos sobre: “se” e “como” acreditam que a matemática e música estão relacionadas. Depois, pode ler rapidamente a introdução antes de passar à seção "Matemática por trás da Música".

Recursos: vídeos do Youtube, livros, revistas, imagens e glossário.

Objetivos de aprendizagem e competências: adote um conceito não quantificado de intervalo, calcule um valor numérico real a partir da razão de frequências e use a fórmula para calcular a proporção de um intervalo resultante.

Síntese e avaliação:

| | |
|--|----------------|
| Escreva 3 aspetos que tenha gostado desta atividade: | 1. 2. 3. |
| Escreva 2 aspetos que tenha aprendido: | 1. 2. |
| Escreva 1 aspeto que necessite de ser melhorado: | 1. |

Introdução

Apesar de muitos estudantes amarem a música e simultaneamente odiarem a matemática, o que eles não sabem é que elas estão relacionadas uma com a outra e, de fato, diz-se que a matemática pode-nos ajudar a explicar a experiência musical. Desde 1998, Grandin, Peterson e Shaw mostraram que a música melhora as capacidades de raciocínio, que são cruciais para aprender conceitos matemáticos, como o raciocínio proporcional e o desenvolvimento de competências geométricas. Rauscher et al. (1997) afirmam que a música promove o desenvolvimento de tais capacidades de pensamento e, especialmente, o reconhecimento de padrões e o uso da lógica.

Pitágoras, um antigo grego, mesmo a partir do século VI aC, percebeu que sons diferentes podem ser feitos com pesos e vibrações diferentes. Isso levou à sua invenção de que o tom de uma corda vibratória é proporcional e pode ser controlado pelo seu comprimento. As cordas que têm metade do comprimento são uma oitava acima do original. Deste modo, quanto menor a corda, maior o tom. Pitágoras também descobriu que as notas de certas frequências soam melhor com frequências múltiplas dessa nota. Por exemplo, uma nota de 220Hz soa melhor com notas de 440Hz, 660Hz e similares. Então pode, já, ver que desde o básico até a síntese mais complicada, a matemática está relacionada com a música.



Fig.1 – Escala diatónica com o conceito de Pitágoras (Retirado de: <https://psy-minds.com/pythagoras-music-spheres/>)

Mathematics and Music



- Pythagoras heard blacksmiths striking different sized anvils and producing different notes – in harmony
- He realised there was a mathematical explanation – ratios!

Fig. 2 – Pitágoras e a Música (Retirado de: <https://www.slideshare.net/Luciano2428/pythagoras-and-music-presentation>)



Frequências, intervalos e proporções na música

4

Alguns conceitos matemáticos comuns que se relacionam com a música são as frequências, intervalos e proporções.

Pitágoras fez as suas descobertas “tocando” com uma corda esticada. Abaixo pode ver uma corda esticada amarrada nas suas extremidades. Quando tocada, vibra. Como todos sabemos, quando um instrumento está vibrando, uma onda de pressão que viaja pelo ar chega ao nosso ouvido como um som.



Pitágoras decidiu dividir essa corda em duas partes e tocou cada extremidade novamente. O som produzido foi o mesmo, mas mais agudo (porque era a mesma nota uma oitava acima):



Pitágoras decidiu continuar. Ele experimentou a corda dividida em 3 partes:



Foi aí que ele percebeu que apareceu um som novo e diferente. Desta vez, não era a mesma nota uma oitava acima, mas uma nota diferente, que precisava de um novo nome. Esse som, além de diferente, funcionou bem com o anterior, criando uma agradável harmonia para o ouvido, porque essas divisões mostravam as relações Matemática $1/2$ e $2/3$ e, aparentemente, o nosso cérebro gosta de relações lógicas definidas.

5

Assim, ele continuou fazendo subdivisões e combinações de sons criando matematicamente escalas que, posteriormente, estimularam a criação de instrumentos musicais que pudessem tocar essas escalas. Atualmente, as notas receberam os nomes que conhecemos hoje. As culturas criaram as suas próprias escalas. Por exemplo, a cultura Chinesa criou a escala pentatônica, enquanto a cultura Ocidental adotou um temperamento igual a 12 tons, conhecido como escala temperada ou escala cromática.

Fontes: <http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/> e <http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html>

Glossário A

Pitágoras: Pitágoras de Samos [a] (c. 570 - c. 495 aC) era um antigo filósofo grego jônico e o fundador de mesmo nome do pitagorismo. Os seus ensinamentos políticos e religiosos eram bem conhecidos na Magna Grécia e influenciaram as filosofias de Platão, Aristóteles e, através delas, a filosofia Ocidental. O conhecimento da sua vida é ocultado pela lenda, mas parece que era filho de Mnesarchus, um entalhador de focas na ilha de Samos. Os estudiosos modernos discordam sobre a educação e as influências de Pitágoras, mas concordam que, por volta de 530 aC, ele viajou para Croton, onde fundou uma escola na qual os iniciados juravam segredo e viviam um estilo de vida ascético e comunitário. Esse estilo de vida envolvia uma série de proibições alimentares, tradicionalmente consideradas como vegetarianismo, embora os estudiosos modernos duvidem que ele tenha defendido o vegetarianismo absoluto. *Retirado de:* <https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras>

Razão: Na matemática, uma razão é um relacionamento entre dois números, indicando quantas vezes o primeiro número contém o segundo. Por exemplo, se uma tigela de frutas contém oito laranjas e seis limões, a proporção de laranjas para limões é de oito para seis (ou seja, 8: 6, que é equivalente à proporção 4: 3). Da mesma forma, a proporção de limões para laranjas é 6: 8 (ou 3: 4) e a proporção de laranjas para a quantidade total de frutas é 8:14 (ou 4: 7). *Retirado de:* <https://en.wikipedia.org/wiki/Ratio>

Frequência: A frequência é o número de ocorrências de um evento repetido por unidade de tempo. O período é a duração do tempo de um ciclo num evento repetido; portanto, o período é o recíproco da frequência. Por exemplo: se o coração de um bebê recém-nascido bate a uma frequência de 120 vezes por minuto, o seu período - o intervalo de tempo entre os batimentos - é de meio segundo (60 segundos divididos por 120 batimentos). A frequência é um parâmetro importante usado na ciência e na engenharia para especificar a taxa de fenômenos oscilatórios e vibratórios, como vibrações mecânicas, sinais de áudio (som), ondas de rádio e luz. *Retirado de:* <https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency>

Glossário B

Oitava: Na música, uma oitava (latim: *oitava*: *oitavo*) ou oitava perfeita (às vezes chamada diapasão) é o intervalo entre um tom musical e outro com o dobro de frequência. A relação de oitava é um fenômeno natural que tem sido referido como o "milagre básico da música", cuja utilização é "comum na maioria dos sistemas musicais". O intervalo entre o primeiro e o segundo harmônicos da série harmônica é uma oitava. Na notação musical, as notas separadas por uma oitava (ou várias oitavas) têm o mesmo nome da letra e são da mesma classe de afinação. Para enfatizar que é um dos intervalos perfeitos (incluindo uníssono, quarta perfeita e quinta perfeita), a oitava é designada P8. Outras qualidades de intervalo também são possíveis, embora raras. A oitava acima ou abaixo de uma nota indicada às vezes é abreviada como 8^a ou 8^{va} (italiano: *all'ottava*), 8^{va} bassa (italiano: *all'ottava bassa*, às vezes também 8^{vb}), ou simplesmente 8 para a oitava na direção indicada, colocando esta marca acima ou abaixo na pauta.

Retirado de: <https://en.wikipedia.org/wiki/Octave>

Intervalo (música): Na teoria musical, um intervalo é a diferença de afinação entre dois sons. Um intervalo pode ser descrito como horizontal, linear ou melódico se se referir a sons que soam sucessivamente, como dois tons adjacentes numa melodia, e vertical ou harmônico se se refere a sons que soam simultaneamente, como num acorde. Na música Ocidental, os intervalos são as diferenças mais comuns entre as notas de uma escala diatônica. O menor desses intervalos é um semitom. Intervalos menores que um semitom são chamados microtons. Eles podem ser formados usando as notas de vários tipos de escalas não diatônicas. Alguns dos menores são chamadas vírgulas e descrevem pequenas discrepâncias, observadas em alguns sistemas de afinação, entre notas anarmonicamente equivalentes, como C# e D b. Os intervalos podem ser arbitrariamente pequenos e até imperceptíveis ao ouvido humano. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Interval_(music))

Terceira menor: Na teoria musical da cultura ocidental, um terço menor é um intervalo musical que abrange três meios-passos, ou semitons.

Terceira maior: Na música clássica da cultura ocidental, um terço é um intervalo musical que abrange três posições na pauta (consulte o número do intervalo para obter mais detalhes) e o terço maior é um terceiro com quatro semitons. Juntamente com a terceira menor, a terceira maior é uma das duas terceiras que ocorrem com mais frequência. É qualificada como maior porque é o maior dos dois: a terceira maior abrange quatro semitons, a terceira menor três semitons.

Quarta: intervalo entre uma nota musical e outra, que está a três graus de distância da primeira, dentro de uma escala.

Quinta perfeito: intervalo entre uma nota musical e outra, que está a quatro graus de distância da primeira, dentro de uma escala.

Frequência: quantidade física indicando o número de ocorrências de um evento num determinado período de tempo.

Tom: som de alta frequência da audição humana, geralmente acima de 5 KHz.

A Matemática por trás das notas musicais

Vamos começar passo a passo:

- ✓ O som é produzido a partir de uma vibração contínua do ar.
- ✓ O número de vibrações por segundo é chamado de frequência, medida em Hertz.
- ✓ A frequência do som determina o seu tom (consulte o glossário) <quanto maior a frequência, maior o tom>.
- ✓ Notas musicais são sons de certas frequências tocadas numa ordem crescente de frequências que produzirão uma escala musical.
- ✓ Considere dois tons (frequências) que são separados por uma distância arbitrária, i . Consequentemente, se tivermos as nossas duas frequências, f_1 e f_2 , elas serão separadas pela distância do intervalo i_1 . Note que o Intervalo é a combinação de dois desses sons).
- ✓ Agora, a razão das duas frequências (f_2 / f_1) pode ser definida como r_1 e pode ser expressa como:

$$f_2 \div f_1 = r_1$$

- ✓ Se tivermos um segundo conjunto de frequências, f_3 e f_4 , o intervalo entre elas poderá ser definido como i_2 . A razão de f_3 e f_4 (sendo f_4 / f_3) seria definida como r_2 . Se i_1 e i_2 tiverem o mesmo intervalo, o que significa que existe a mesma distância de frequência entre f_1 e f_2 , bem como f_3 e f_4 , as proporções serão iguais. Isso não nos diz nada sobre o registo das frequências, apenas que os intervalos são semelhantes (não sabemos se eles estão no mesmo registo). Poderíamos expressar como:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f4 \div f3 = r2$$

$$i1 \cong i2 \text{ if and only if } r1 = r2$$

✓ Se tivermos três frequências $f1$, $f2$ e $f3$. O intervalo entre $f1$ e $f2$ é $i1$, o intervalo entre $f2$ e $f3$ é $i2$ e o intervalo maior entre $f1$ e $f3$ é $i3$. Aplicando os mesmos conceitos de proporções calculadas nos exemplos anteriores, obtemos:

$$f2 \div f1 = r1$$

$$f3 \div f2 = r2$$

$$f3 \div f1 = r3$$

$$\therefore f2 = r1 \cdot f1 \text{ and } f3 = r2 \cdot f2$$

Substituting in for $f2$

$$f3 = r2 \cdot (r1 \cdot f1)$$

$$f3 \div f1 = r2 \cdot r1$$

substituting $r3$ for $f3 \div f1$

$$r3 = r2 \cdot r1 \text{ and } i3 = i1 + i2$$

✓ Portanto, mostramos que adicionar intervalos é igual à multiplicação das taxas de frequência.

$$\text{since } r_3 = r_2 \cdot r_1$$

$$\log(r_3) = \log(r_2) + \log(r_1)$$

since $i_3 = i_2 + i_1$ we can show that

$$i_3 = \log(r_3) \text{ and } i_2 = \log(r_2) \text{ and } i_1 = \log(r_1)$$

✓ Agora temos um número definido para o valor de i . É o log da razão das frequências que compreende o intervalo em questão. A taxa de frequência para qualquer intervalo especificado será positiva, mas pode ser maior que ou menor que 1. Se o valor de r for maior que 1, sabemos que $0 < f_1 < f_2$ e o intervalo está a subir (porque f_2 é maior que f_1). Da mesma forma, se $0 < r < 1$ então $0 < f_2 < f_1$ e sabemos que o intervalo está a descer. Portanto, o log de um intervalo ascendente (com $r > 1$) será positivo enquanto o log de um intervalo descendente (com $r < 1$) será negativo.

✓ No piano, tocar DÓ e RÉ juntos é descrito como um grande segundo intervalo, porque RÉ é a segunda nota na escala

✓ Segue-se um terceiro intervalo maior, porque o MI é a terceira nota na escala

✓ De DÓ a FA é chamado o quarto intervalo perfeito

✓ de DÓ a SOL, que é a quinta nota, é chamado o quinto intervalo perfeito e assim por diante

✓ finalmente, um DÓ e DÓ tocado juntos é chamado de oitava (veja:

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKKug> até ao minuto 2:08).

✓ Agora sabemos como determinar a razão de um intervalo formado a partir de outras relações. Por exemplo, se soubéssemos que um intervalo (r_1) tinha uma proporção de $5/4$ (que, se conhecer a sua série de tons, reconhecerá como uma terceira maior) e outro (r_2) a proporção $6/5$ (uma terceira menor), podemos calcular a proporção da sua soma. Portanto, uma terceira maior ($5/4$) mais uma terceira menor ($6/5$) dá:

$$r1 \cdot r2 = r3$$
$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

✓ A relação 3/2 é uma quinta perfeito. Assim, provamos matematicamente a partir de um conceito simples que uma terceira maior e uma terceira menor representam uma quinta perfeita! Um pequeno refrescar para as suas pequenas proporções de tons inteiros inteiro, para que possa tentar, sozinho, outros exemplos:

| | |
|-----|----------------|
| 2/1 | Octave |
| 3/2 | Perfect Fifth |
| 4/3 | Perfect Fourth |
| 5/3 | Major Sixth |
| 5/4 | Major Third |
| 6/5 | Minor Third |

12

✓ Adotamos o conceito não quantificado de intervalo, derivamos um valor numérico real para ele a partir da razão de frequências e usamos a nossa fórmula para calcular a proporção de um intervalo resultante.

Aulas baseadas em: <https://www.notreble.com/buzz/2010/02/18/math-and-music-equations-and-ratios/>

TAREFA



Use razões para estimar frequências:

Considere as frequências f_0 , f_1 , f_2 e f_3 . Dado que $f_1 = 5$ Hz, $r_2 = 6/5$ e $r_3 = 3/2$ estimam f_0 .

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

A Matemática de Vídeos Musicais:

<https://www.youtube.com/watch?v=rTT1XHJJKKug>

Conversa de TED: Música e Matemática: O génio de Beethoven

<https://www.youtube.com/watch?v=zAxT0mRGuoY>

Webpages:

Math Central: <http://mathcentral.uregina.ca/beyond/articles/Music/music1.html>

Universidade Kent State: <https://musicedmasters.kent.edu/the-connection-between-music-and-mathematics/>

Matemática e Música: <http://www.simplifyingtheory.com/mathematics-and-music/>

Lições de Matemática e Música : <https://www.notreble.com/buzz/2010/02/04/math-and-music-intervals/>

13

Books:

Grandin, T., Peterson, M., & Shaw, G. L. (1998). Spatial- temporal versus language-analytic reasoning: The role of music training. *Arts Education Policy Review*, 99(6), 11-15.

Kung, D. (2013). *How Music and Mathematics Relate*. The Great Courses, Virginia.

Retirado de: http://www.chrysalis-foundation.org/1373_MusicandMath_8-28.pdf

Rauscher, R. H., Shaw, G. L., Levine, I. J., Wright, E. L., Dennis, W. R., & Newcomb, R. I. (1997).

Music training causes long-term enhancement of preschool children's spatial-temporal reasoning. *Neurological Research*, 19, 2-8.