PARTE I: Arte e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

UNIDADE 11: FRACTAIS E DIMENSÕES

Sandgärdskolan

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Guia do Professor

Título: Fractais e dimensões

Faixa Etária: 16 – 18 anos

Duração: 2 horas

Conceitos Matemáticos: Escalas

Conceitos Artísticos: Fractais

Objetivos Gerais: fractais são algumas das formas geométricas mais bonitas e bizarras. Os objetivos são aprender e ver parte da matemática por trás desses padrões fantásticos. As formas dos fractais têm a mesma aparência em várias escalas diferentes - pode pegar num pequeno fragmento da forma e é igual à forma inteira. Essa propriedade curiosa é chamada de auto-similaridade. No conceito matemático desta unidade, examinaremos polígonos inscritos num círculo.

Recursos: esta unidade fornece conceitos para lecionar fractais e a matemática por trás deles

Dicas para o professor: comece com a arte e avance para a matemática.

Objetivos de aprendizagem e competências: no final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Compreender as soluções apresentadas para o problema dos 21 vasos;
- Representar a cena em causa;
- Calcular volumes de sólidos geométricos.

Síntese e Avaliação:

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

Introdução

Fractais são algumas das formas geométricas mais bonitas e bizarras. Eles têm a mesma aparência em várias escalas diferentes - pode pegar num pequeno fragmento da forma e ela tem o mesmo aspeto de toda a forma. Essa propriedade curiosa é chamada de auto-similaridade.

Fractais

Para criar um fractal, pode começar com um padrão simples e repeti-lo em escalas menores, de novo e de novo, para sempre. Na vida real, evidentemente, é impossível desenhar fractais com padrões "infinitamente pequenos". No entanto, podemos desenhar formas que se parecem com fractais. Usando a matemática, podemos pensar nas propriedades que um fractal real teria - e isso é muito surpreendente.
Os fractais são muito populares na observação matemática, porque evidenciam-se muito bonitos, apesar de se poder criar usando padrões simples como os abaixo (Figura 1). Pode ampliar um fractal, e os padrões e formas continuarão a repetir-se, para sempre.

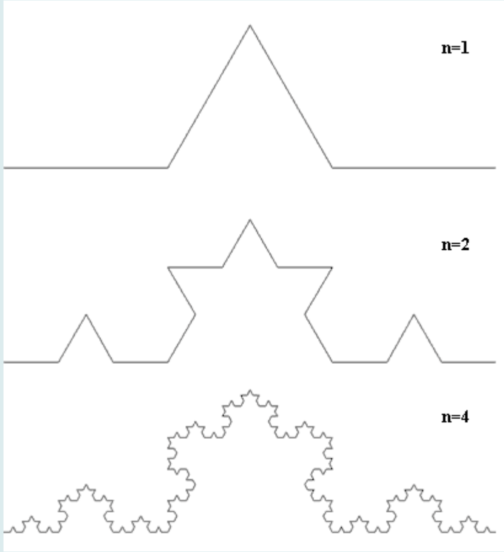


Figura 1 - Curvas simples de Koch mostram auto-similaridade estrita (retirado de https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fractal_koch.png)

Software de geração de Fractal é qualquer tipo de programa gráfico que gere imagens de fractais. Existem muitos programas, gratuitos e comerciais, geradores de fractais disponíveis. Estão disponíveis aplicativos móveis para jogar ou trabalhar com fractais. Alguns programadores criam software fractal para si mesmos devido à novidade e ao desafio de entender as matemáticas relacionadas.
O programa de geração de fractais cria beleza matemática. Os computadores modernos podem levar segundos ou minutos para concluir uma única imagem fractal de alta resolução. As imagens são geradas para quer para simulação

(modelação) quer para criar fractais aleatórios para a arte. Os fractais gerados para modelação são usados para computação gráfica. Também são usados para imitar paisagens naturais com paisagens fractais. Os fractais são gerados no programa de visualização de música.

Glossário

n: Representa qualquer número natural. Exemplos de números inteiros positivos: 0, 1, 2, 3

Poliedro: É um sólido a três dimensões, com faces poligonais planas, arestas retas e cantos afiados ou vértices.

Polígono regular: Um polígono é regular quando todos os ângulos são iguais e todos os lados são iguais (caso contrário, é "irregular"). Este é um pentágono regular (um polígono de 5 lados).

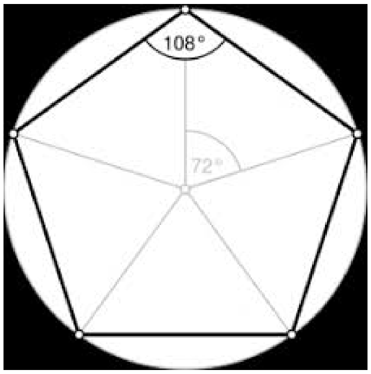


Figura 2: Pentágono regular (retirado de https://www.significados.com.br/pentagono/)

Trigonometria: Seno, cosseno e tangente são as principais funções usadas na trigonometria e são baseadas num triângulo retângulo. Antes de abordar exclusivamente as funções, é útil dar um nome a cada lado de um triângulo retângulo, como na figura abaixo:

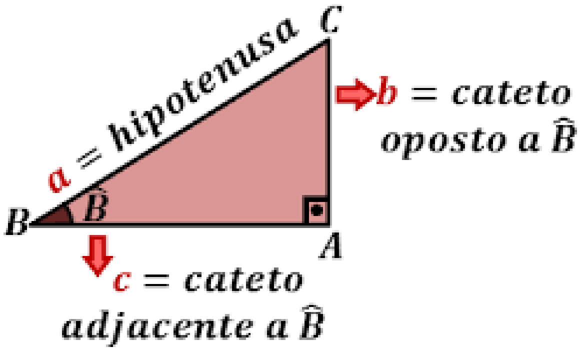
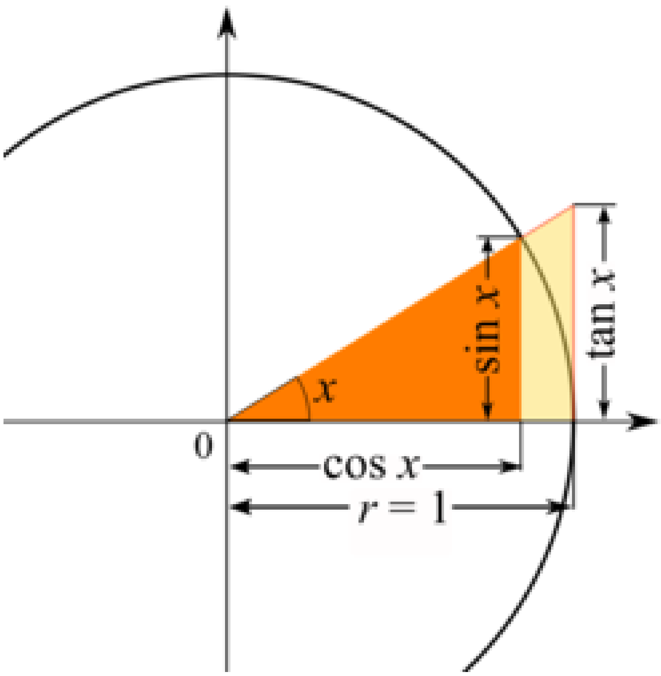


Figura 3: Triângulo retângulo (retirado de http://www.pauloroberto.qlix.com.br/trigonometria/)

Pela definição acima, as funções trigonométricas são definidas apenas para ângulos entre 0 e 90 graus (0 e π / 2 radianos). Usando o círculo unitário, o cosseno e o seno podem ser definidos como funções periódicas com o período de 360 graus (2π radianos).



A Matemática por trás dos fractais

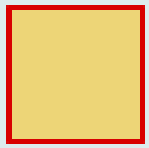
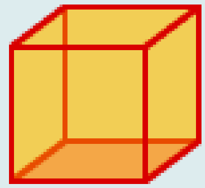
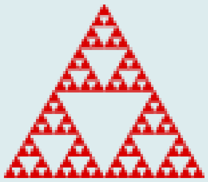
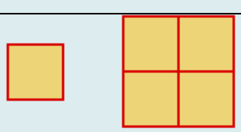
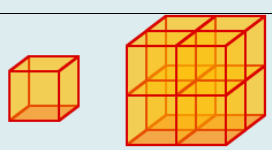
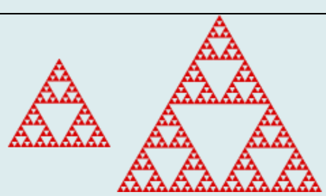
Triângulo de Sierpinski

Um dos exemplos é o triângulo de Sierpinski, composto por inúmeros triângulos. Criamo-lo cortando repetidamente um triângulo no centro de todos os outros triângulos. No entanto, existem muitos outros métodos para criar esta forma - e aqui estão apenas alguns.

Como fazer o triângulo de Sierpinski no Geogebra

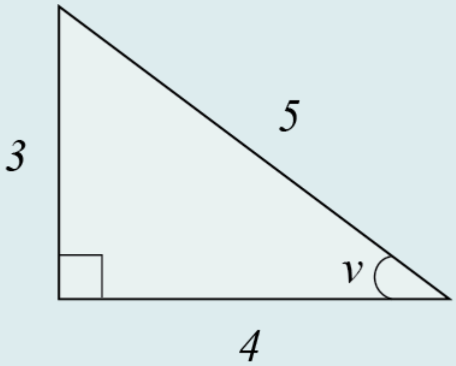
Como fazer o triângulo de Sierpinski no Geogebra:

https://youtu.be/tmmHEa6j-_k

Dimensão 1	Dimensão 2	Dimensão 3	Dimensão 1.585…
×2	 ×4	 ×8	 ×3
Uma linha tem dimensão 1. Quando multiplicada por um fator 2, o seu comprimento aumenta por fator de 2.	Um quadrado tem dimensão 2. Quando multiplicado por um fator 2, a sua área aumenta num fator de 4.	Um cubo tem dimensão 3. Quando multiplicado por um fator 2, o seu volume aumenta num fator de 8.	Quando o triângulo de Sierpinski é multiplicado por um fator de 2, a sua área aumenta num fator de 3. Observando os fatores de aumento azuis acima, podemos deduzir que ele deve ter uma dimensão entre 1 e 2. Não há números inteiros entre eles 1 e 2, portanto, a dimensão o triângulo de Sierpinski deve ser reduzida. De fato, pode-se calcular que está em torno de 1,585.
			

Para calcular um ângulo desconhecido:

Calcule o ângulo entre a hipotenusa e o lado que tem 4 unidades de comprimento no seguinte triângulo retângulo:



Começamos por identificar o ângulo mencionado no texto: é o ângulo agudo à direita no triângulo. Isso significa que o lado com 4 unidades de comprimento é o cateto adjacente e o lado com 3 unidades de comprimento é o cateto oposto.

Substituímos os valores conhecidos na fórmula do cosseno:

$$\cos(v) = cateto\ adjacente \div hipotenusa = 4 \div 5$$

e então resolvemos o ângulo $\boldsymbol{v}$ usando a função inversa (arccos):

$$\boldsymbol{v = cos^{-1}(4/5) \approx 36,87}$$

Assim, o ângulo $\boldsymbol{v}$, cujo valor do cosseno é 4/5, é aproximadamente igual a 36,87 graus.

Substituímos os valores conhecidos na fórmula do seno:

$$\mathrm{sen}(v) = cateto\ oposto \div hipotenusa = 3 \div 5$$

e então resolvemos o ângulo $\boldsymbol{v}$ usando a função inversa (arcsen):

$$\boldsymbol{v = sen^{-1}(3/5) \approx 36,87}$$

Assim, o ângulo $\boldsymbol{v}$, cujo valor do seno é 3/5, é aproximadamente igual a 36,87 graus.

Finalmente, tentamos fazer o mesmo usando a função:

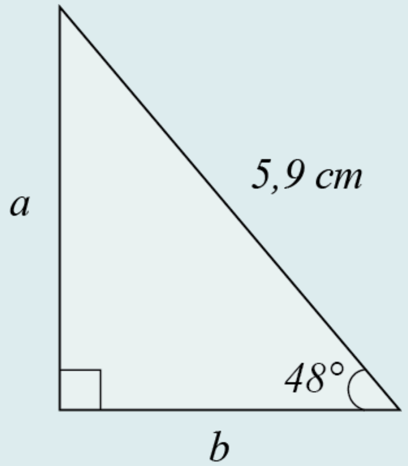
$$\boldsymbol{\tan v = cateto\ oposto \div\ cateto\ adjacente = 3 \div 4}$$

Resolvemos o ângulo $\boldsymbol{v}$ usando a função inversa ($\boldsymbol{arctan}$) e obtemos assim o ângulo $\boldsymbol{v}$, cujo valor da tangente é 3/4, e é aproximadamente igual a 36,87 graus. Como podemos ver, obtemos o mesmo valor no ângulo $\boldsymbol{v}$, independentemente de qual das três funções trigonométricas escolhemos usar, o que está completamente correto.

Calcule o comprimento desconhecido de um lado:

Digamos que temos um triângulo retângulo com um ângulo conhecido de 48 °, uma hipotenusa com 5,9 cm de comprimento e que queremos calcular os comprimentos dos catetos.

Para começar, devemos desenhar uma figura para obter uma visão geral dos lados e ângulos do triângulo, reduzindo, assim, o risco de necessitarmos de raciocinar incorretamente:



Do ângulo conhecido, o lado b é o cateto adjacente. Como sabemos o comprimento da hipotenusa, usamos a função cosseno para determinar o comprimento do lado b:

$$\boldsymbol{cos(48°) = b \div 5,9}$$
$$\boldsymbol{5,9 * cos(48°) =}$$
$$\boldsymbol{b \approx 3,948}$$

Pela nossa figura, podemos ver que o lado a é o lado oposto, por isso usamos a função seno para encontrar o comprimento do lado a (nessa situação, também poderíamos ter usado a função tangente, pois agora sabemos o comprimento do cateto adjacente):

$$\boldsymbol{sen(48°) = a \div 5,9}$$
$$\boldsymbol{5,9 * sen(48°) =}$$
$$\boldsymbol{a \approx 4,385}$$

TAREFAS

O matemático e físico grego Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) usou e descreveu os polígonos para determinar um valor aproximado de π.

TAREFA 1

Demonstre que ao calcular a área de um polígono regular com n lados inscrito numa circunferência de raio x se obtém um valor aproximado de $\pi \approx n*\sin(180°/n)$, enquanto que ao calcular a área de um polígono regular com o mesmo nº de lados circunscrito numa circunferência com o mesmo raio se obtém um valor aproximado de $\pi \approx n*\tan(180°/n)$.

Note que acaba de mostrar que $n*\tan(180°/n) > Pi > n*\sin(180°/n)$.

TAREFA 2

Admitindo que n = 96, compare com os valores que Arquimedes obteve na sequência geométrica.

TAREFA 3

Averigue, escolhendo valores cada vez maiores de n, como pode aproximar o valor de π usando a sua calculadora.

INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Como desenhar fractais em 5 minutos:

https://youtu.be/sFEYQMrWNHU