

# PARTE I: Artes Visuais e Matemática

FAIXA ETÁRIA: 16 – 18

---

## UNIDADE 10: FRISOS NA CALÇADA PORTUGUESA

---

SPEL – Sociedade Promotora de Estabelecimentos de Ensino

“Cobblestone Floor”  
(Fonte: Photo by Magda Ehlers from Pexels)



Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union

## Guia do Professor

**Título:** Frisos na calçada portuguesa

**Faixa Etária:** 16 – 18 anos

**Duração:** 2 horas

**Conceitos Matemáticos:** Isometrias e frisos.

**Conceitos Artísticos:** Calçada portuguesa e frisos

**Objetivos Gerais:** Serem capazes de identificar os diferentes tipos de simetria e de frisos.

**Instruções e Metodologias:** Além da explicação dos conceitos teóricos é importante que se usem vídeos e construções com o Geogebra para melhor compreensão dos conteúdos.

**Recursos:** Computador com ligação à internet; Aceder ao website:

<https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>

**Dicas para o professor:** Comece por explicar os conceitos teóricos e se possível usar imagens e vídeos para uma explicação mais eficaz. Mostrar/construir algumas simetrias e/ou frisos com o Geogebra para uma melhor compreensão dos conteúdos e para que depois os alunos possam resolver os exercícios sozinhos.

**Resultados de aprendizagem e competências:**

No final desta unidade, o aluno será capaz de:

- Identificar os vários tipos de simetrias e de as aplicar.
- Identificar os vários tipos de frisos e de os construir.

**Síntese e Avaliação:**

Indique 3 aspetos que tenha gostado acerca desta atividade:	1. 2. 3.
Indique 2 conceitos que tenha aprendido:	1. 2.
Indique 1 aspeto a melhorar:	1.

## Introdução

Muitos passeios, espaços públicos ou privados das cidades portuguesas são revestidos por um piso a que chamamos calçada portuguesa. A calçada portuguesa resulta do calcetamento com pedras, geralmente em calcário branco e preto, de formato irregular, formando padrões decorativos ou mosaicos através do contraste das cores.

Sem querer estamos a pisar Matemática já que neste tipo de calçada facilmente encontramos simetrias, reflexões, rotações e translações. Caso os desenhos se repitam numa ou mais direções os matemáticos chamam-lhes frisos e padrões, respetivamente. Nestas calçadas portuguesas existem também exemplos de rosáceas, figuras planas em que o número de simetrias é finito, sendo elas rotações ou reflexões, e em que existe um ponto do plano que é fixo para todas as simetrias da figura.

No caso dos frisos está demonstrado que só existem 7 tipos distintos e no caso dos padrões são 17 tipos. Em Lisboa, cidade onde terá surgido a calçada portuguesa, estão identificados todos os 7 frisos e 12 dos 17 padrões. E nos Açores existem duas cidades em que os 7 tipos de frisos também já estão identificados, são elas Ponta Delgada e Angra do Heroísmo, conquistando assim as duas a designação de “Cidade dos sete frisos”.



## Frisos na calçada portuguesa



**Fig. 1 – Calçada portuguesa**

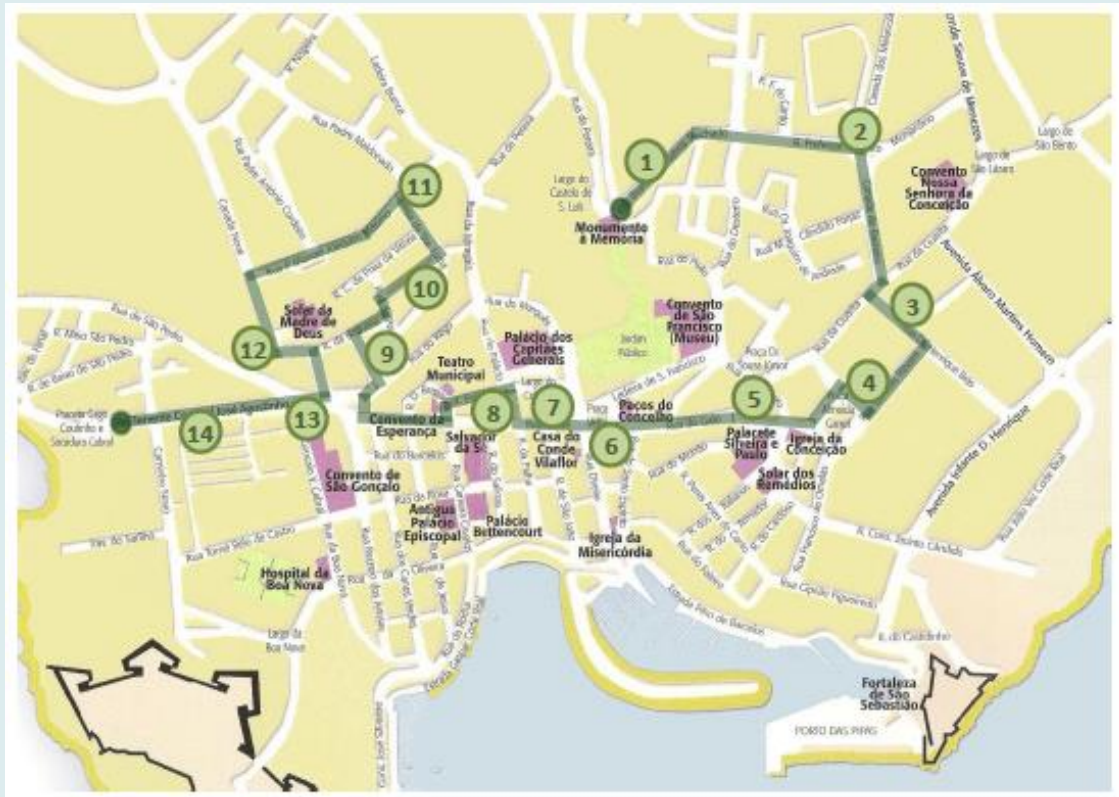
(Fonte: Foto de Silas Camargo Silão, do Pixabay. Retirado de: <https://pixabay.com/pt/photos/cal%C3%A7ada-piso-ch%C3%A3o-pedra-1842527/> (11/07/2019))

Em muitas cidades de Portugal continua a revestir-se os passeios e ruas através do calcetamento com pedras, geralmente em calcário branco e preto, de formato irregular, formando padrões decorativos ou mosaicos através do contraste das cores. A este tipo de revestimento chamamos calçada portuguesa.

Os pavimentos calcetados terão surgido em Portugal por volta de 1500, mas a calçada portuguesa, calçada decorativa como hoje conhecemos terá surgido apenas nos meados do século XIX.

Nessa altura o Tenente-General, e engenheiro, Eusébio Furtado, orientou a criação da calçada do quartel do Batalhão de Caçadores n.º 5, no Castelo de São Jorge, aproveitando a mão de obra dos presos da cadeia do Limoeiro surgiu o primeiro tapete decorativo que apresentava um ziguezague de grande impacto visual.

Depois do sucesso desta calçada seguiu-se toda a área da Praça do Rossio (cerca de 9000 m<sup>2</sup>) e muitas outras calçadas em Lisboa, passados uns anos seguiram-se calçadas noutras cidades portuguesas e mais tarde noutros países lusófonos e não só.



**Fig. 2 – Roteiro de frisos da cidade de Angra do Heroísmo**

(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

Os trabalhadores especializados na colocação deste tipo de calçada são denominados mestres calceteiros e nas suas obras é normal vermos motivos como o denominado mar largo (usado no Rossio e por exemplo no calçadão de Copacabana), golfinhos, caravelas, flores, etc..

A calçada portuguesa é muito rica em conceitos matemáticos como simetrias, reflexões, rotações e translações. É frequente encontrarmos rosáceas, frisos e padrões nestas calçadas.

## Glossário

**Calçada portuguesa:** pavimentação que resulta do calcetamento com pedras, geralmente em calcário branco e preto, de formato irregular, formando padrões decorativos ou mosaicos através do contraste das cores.

**Calcário:** rocha sedimentar.

**Mar largo:** padrão, com linhas alternadas em branco e preto, fazendo um paralelismo estilizado com o ritmo das ondas do mar e das marés.

## A Matemática nos frisos da calçada portuguesa

Como vimos anteriormente a calçada portuguesa é rica em rosáceas, padrões e em frisos, mas antes de abordarmos estes conceitos convém fazermos uma pequena revisão sobre isometrias.

Uma **isometria** é uma transformação geométrica que preserva as distâncias entre pontos, isto é, a figura inicial e a sua transformada são congruentes.

As únicas isometrias do plano são as: **translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes**.

Quando através de uma isometria diferente da identidade, a imagem de uma figura coincide com a figura original, então esta figura tem simetria. Existe uma simetria para cada um das quatro isometrias.

### Tipos de simetria

Uma figura plana pode ter:

- **simetria de reflexão**, se há uma reflexão que a deixa invariante;
- **simetria de rotação**, se há uma rotação que a deixa invariante;
- **simetria de translação**, se há uma translação que a deixa invariante;
- **simetria de reflexão deslizante**, se há uma reflexão deslizante que a deixa invariante.

7

Podemos agora incidir o nosso estudo sobre os **frisos**.

Um **friso** é uma figura plana que possui uma infinidade de simetrias de translação. Os vetores associados a essas translações possuem todos a mesma direção e são múltiplos inteiros de um dado vetor  $\vec{u}$  não nulo.

Nota: As restantes simetrias de um friso podem ser as rotações de ângulo  $180^\circ$  (meia-volta), reflexões ou reflexões deslizantes relativamente a uma reta paralela a  $\vec{u}$ .

Existem apenas sete maneiras distintas de repetir um motivo ao longo de um friso, recorrendo aos quatro tipos de simetria (simetria de translação, simetria de rotação (de ângulo  $180^\circ$ ), simetria de reflexão e simetria de reflexão deslizante).



A identificação do grupo de friso pode ser feita através de algumas perguntas. A figura 3 mostra um algoritmo usado para determinar o grupo de simetria de frisos.

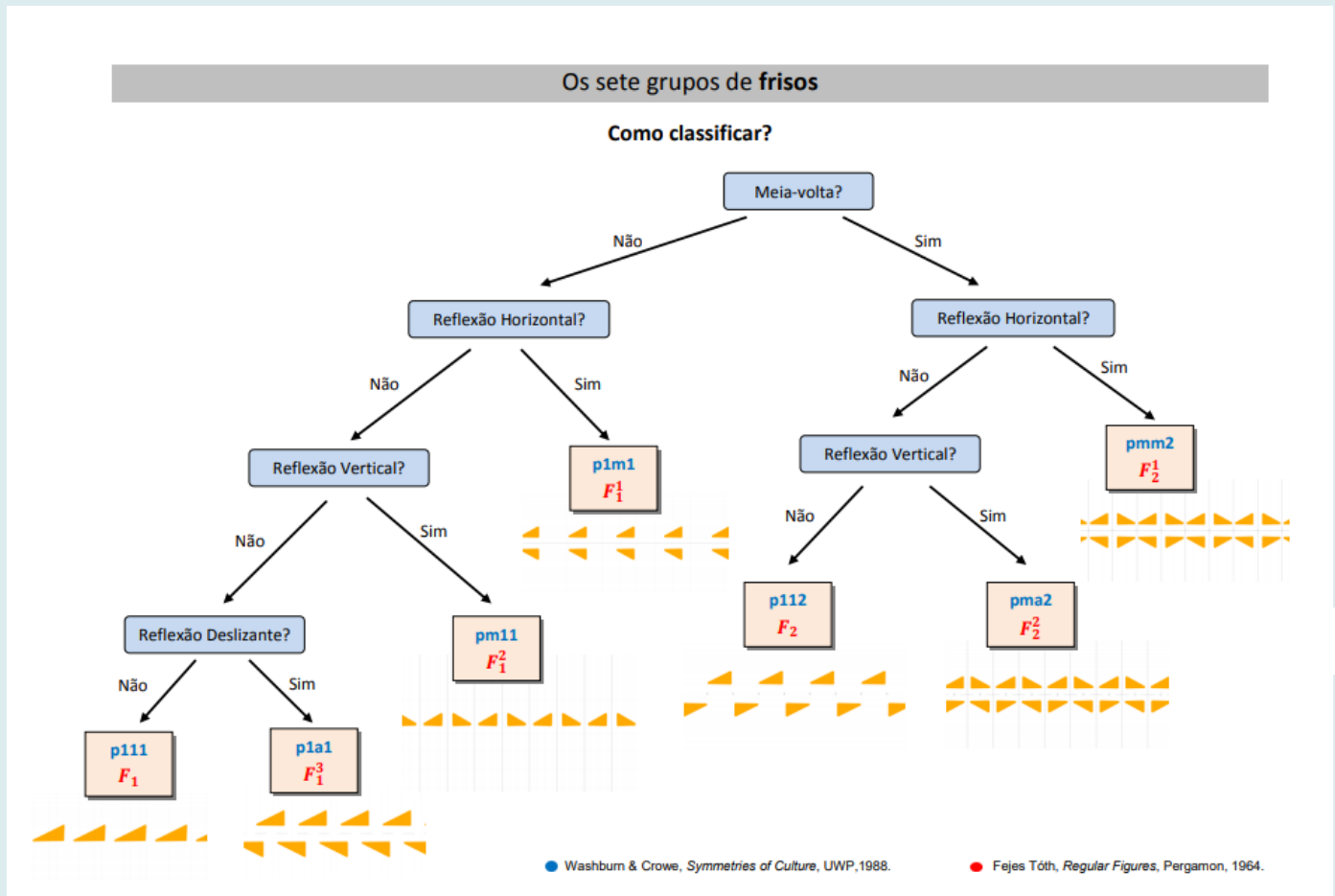


Fig. 3 – Os sete grupos de frisos

(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Retirado de: [http://sites.uac.pt/rteixeira/files/2013/07/Fluxograma\\_Frisos\\_final.pdf](http://sites.uac.pt/rteixeira/files/2013/07/Fluxograma_Frisos_final.pdf) (11.07.2019))

Vejamos agora um exemplo de cada um dos 7 grupos de frisos encontrados nas calçadas de Angra do Heroísmo:

### 1. Friso só com translação

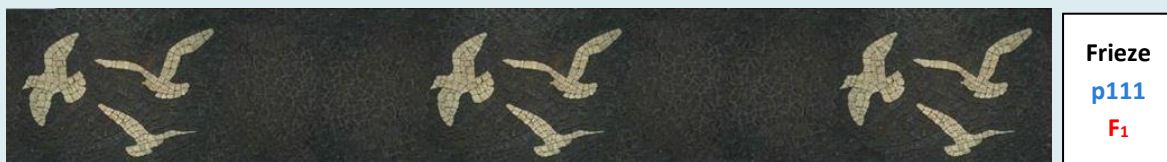


Fig. 4 – Friso em calçada junto ao Largo do Colégio

(Fonte: Teixeira, R. C. (2014, Julho 14). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/> (11/07/2019))



## 2. Friso com reflexões deslizantes e translação



**Friso**  
**p1a1**  
 $F \frac{3}{1}$

**Fig. 5 – Friso na Rua da Queimada**

(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

## 3. Friso com reflexões de eixo vertical e translação

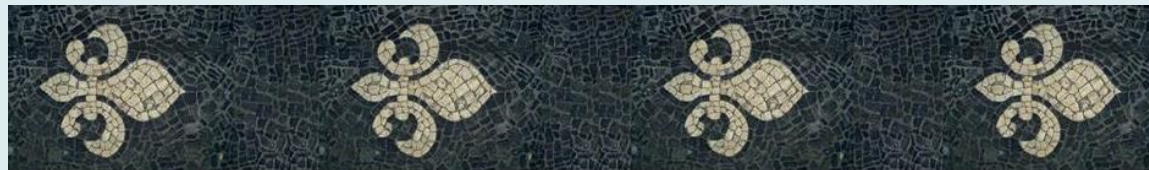


**Friso**  
**pm11**  
 $F \frac{2}{1}$

**Fig. 6 – Friso na Rua de Cima de Santa Luzia**

(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

## 4. Friso com reflexões de eixo horizontal e translação



**Friso**  
**p1m1**  
 $F \frac{1}{1}$

**Fig. 7 – Friso em calçado junto ao Largo do Colégio**

(Fonte: Teixeira, R. C. (2014, Julho 14). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/> (11/07/2019))

## 5. Friso com rotação de 180° (meia-volta) e translação



**Friso**  
**p112**  
 $F_2$

**Fig. 8 – Friso na Rua de São João**

(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

6. Friso com rotação de 180° (meia-volta), reflexão de eixo vertical, reflexão deslizante e translação



Friso  
pma2  
 $F\frac{2}{2}$

**Fig. 9 – Friso na Avenida Tenente Coronel José Agostinho**  
(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://www.mat.uc.pt/mp12013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

7. Friso com rotação de 180° (meia-volta), reflexão de eixo vertical, reflexão de eixo horizontal e translação



Friso  
pmm2  
 $F\frac{1}{2}$

**Fig. 10 – Friso na Rua da Conceição**  
(Fonte: Teixeira, R. C. (2014, Julho 14). Os sete tipos de frisos em calçada de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://cienciapatodos.webnode.pt/news/os-sete-tipos-de-frisos-em-cal%C3%A7ada-de-angra-do-heroismo/> (11/07/2019))

Acabamos de comprovar que Angra do Heroísmo é uma “Cidade dos sete frisos”, feito que valoriza o seu património das calçadas e que permite dinamizar o turismo matemático.

# TAREFAS

## TAREFA 1

Na figura ao lado está representado um friso.

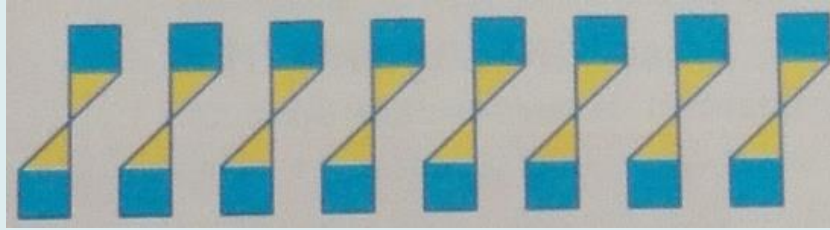


Fig. 11 - Friso

(Fonte: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

1.1. Identifica a isometria que se aplica ao motivo I para obter o motivo II.

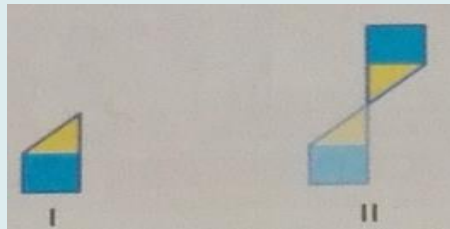


Fig. 6 - Motivos do friso

(Fonte: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

1.2. Quais dos vetores representados na figura ao lado correspondem a translações que deixam invariante o friso?

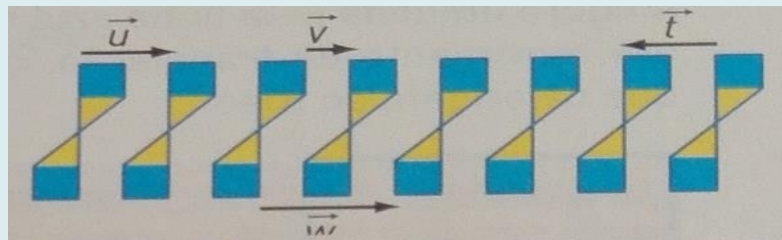


Fig. 7 - Friso

(Fonte: Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). Novo espaço 10: matemática A, 10º ano. Porto: Porto Editora)

## TAREFA 2

Identifica as simetrias que existem em cada um dos seguintes frisos.

2.1.

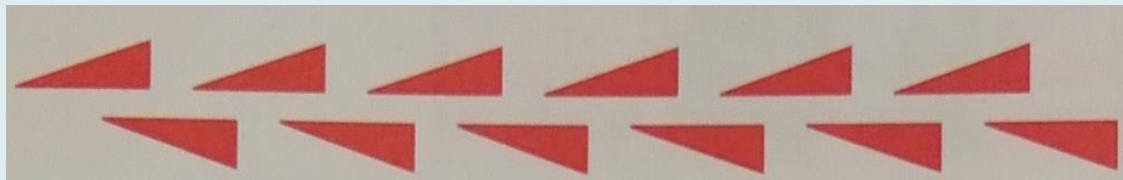


Fig. 8 - Friso

(Fonte: Rodrigues, B., et al. (2015), Novo Espaço - Matemática B - 10.º Ano)

2.2.

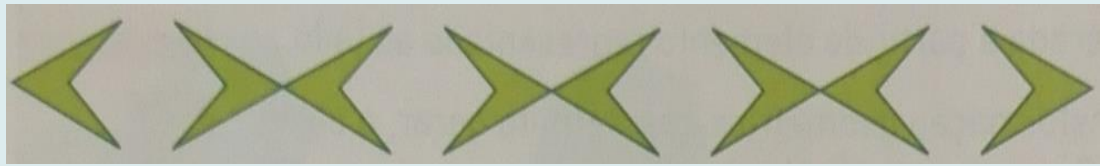


Fig. 9 – Friso

(Fonte: Rodrigues, B., At al. (2015), Novo Espaço – Matemática B – 10.º Ano)

2.3.



Fig. 10 – Friso na Rua Dr. Henrique Braz

(Fonte: Teixeira, R. C. (2013). Roteiro de Frisos da Cidade de Angra do Heroísmo. Retirado de: <https://www.mat.uc.pt/mpt2013/files/Roteiro-de-frisos-Angra.pdf> (11.07.2019))

### TAREFA 3



Usando o motivo e construa um friso que tenha simetria de reflexão de eixo horizontal.

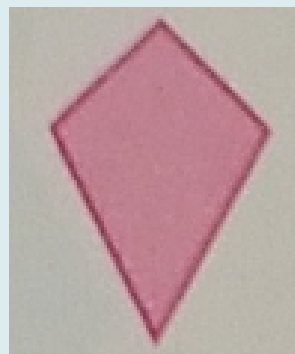


Fig. 11 – Motivo do friso

(Fonte: Rodrigues, B., At al. (2015), Novo Espaço – Matemática B – 10.º Ano)

12



### TAREFA 4

Para cada um dos quatro frisos, que estão representados a seguir, identifica as isometrias que o deixam invariante.

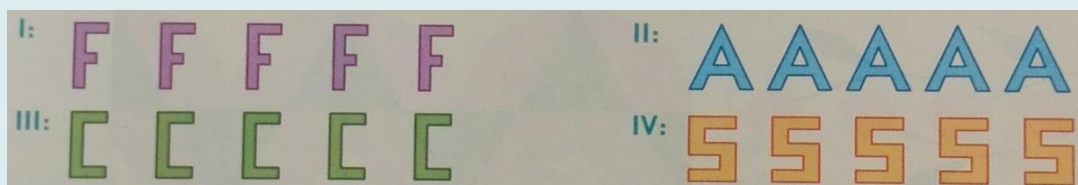


Fig. 12 – Frisos

(Fonte: Rodrigues, B., At al. (2015), Novo Espaço – Matemática B – 10.º Ano)



## INFORMAÇÕES E RECURSOS ADICIONAIS

Calçada portuguesa

<https://getlisbon.com/descobrindo/origens-da-calcada-portuguesa/>

Isometrias e frisos

<https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-transformations-congruence>

<https://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

<http://www.atractor.pt/mat/GeCla/>

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/materiais/frisos.htm>

<https://www.youtube.com/watch?v=algl9T658bk>

<https://www.youtube.com/watch?v=xr7-OhfAakk>

Explore as simetrias com o GeCla - Generator and Classifier Programme (em inglês):

[http://www.atractor.pt/mat/GeCla/index\\_en.html](http://www.atractor.pt/mat/GeCla/index_en.html)

Explore as isometrias e os frisos com o Geogebra

<https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>